

Ein hybrides LES/RANS-Verfahren für konjugierte Impuls-, Wärme- und Stoffübertragung mit Relevanz zu Brennkammerkonfigurationen

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Björn Kniesner

aus Weilburg

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. habil. C. Tropea
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. K. Hanjalić
	Priv.-Doz. Dr.-Ing. habil. S. Jakirlić

Tag der Einreichung:	27. November 2007
Tag der mündlichen Prüfung:	30. Januar 2008

Darmstadt 2008

D17

für Patricia, Jaromir und Jamila

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Strömungslehre und Aerodynamik der Technischen Universität Darmstadt in den Jahren 2004 bis 2007. Während dieser Zeit bearbeitete ich das Teilprojekt C3 des Sonderforschungsbereichs (SFB) 568 „Strömung und Verbrennung in zukünftigen Gasturbinenbrennkammern“.

Herrn Prof. Tropea und Herrn Dr. Jakirlić möchte ich an dieser Stelle für die Möglichkeit zu dieser Arbeit danken sowie der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Finanzierung der Arbeit im Rahmen des oben erwähnten SFB 568.

Besonderen Dank möchte ich Herrn Dr. Jakirlić für die Betreuung und Unterstützung während dieser Zeit aussprechen.

Herrn Prof. Hanjalić danke ich für die Übernahme des Koreferates sowie für die Anregungen und Vorschläge während seiner Zeit als Gastprofessor in Darmstadt.

Weiterhin möchte ich auch Paul Altenhöfer und Gisa Kadavelil, die mich mit ihrer Diplom- bzw. Studienarbeit tatkräftig unterstützt haben, in meinen Dank mit einbeziehen.

Ebenso danke ich allen, die nicht namentlich erwähnt sind, aber zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben, hauptsächlich meinen Kolleginnen und Kollegen sowie Freunden.

Bei meinen Eltern möchte ich mich für ihre Unterstützung sowie die nicht selbstverständliche Ausbildung bedanken, die sie mir ermöglicht haben und welche sicherlich der Grundstein für die vorliegende Arbeit war.

Schließlich danke ich vor allem meiner Frau Patricia für ihre Geduld, die stetige Unterstützung und Aufmunterung, ohne die ich es nicht bis zum Ende geschafft hätte.

Darmstadt, im November 2007

Björn Kniesner

Abstrakt

Ein wichtiger Aspekt bei der Verbesserung der Lebensdauer, der Umweltverträglichkeit und des generellen Betriebsverhaltens von Gasturbinenbrennkammern ist die richtige Erfassung der instationären Prozesse in der Brennkammer und der thermischen Belastung der Brennkammerwände. Aufgrund der Komplexität der Geometrie und den damit verbundenen numerischen Schwierigkeiten sowie der Forderung nach geringem Rechenaufwand sind in der Industrie für die Strömungsberechnung hauptsächlich auf den zeitgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen beruhende, sogenannte Reynolds-Averaged Navier-Stokes-Verfahren (RANS) im Einsatz. Diese Methode beschreibt gut den generellen Charakter der Strömung. Instationäre Effekte werden hingegen, bedingt durch die zeitliche Mittelung, gar nicht oder nur unzureichend erfasst. Abhilfe kann hier die Methode der Large-Eddy Simulation (LES) schaffen. Diese ist in der Lage, einen großen Teil der Instationarität der Strömung dadurch zu erfassen, dass die großen turbulenten Wirbel, welche hauptverantwortlich für den turbulenten Energietransport sind, direkt aufgelöst werden und nur der Einfluss der kleinen Wirbel modelliert wird. Der Preis dafür ist jedoch ein um ein Vielfaches erhöhter Rechenaufwand, der hauptsächlich dadurch bestimmt wird, dass die wandnahen Regionen ausreichend gut aufgelöst werden müssen.

An diesem Punkt setzt das im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte zonale hybride LES/RANS-Verfahren an. Sein Ziel ist es, die Vorteile beider bereits erwähnten numerischen Methoden zu kombinieren, um damit ein Berechnungsverfahren bereitzustellen, welches in der Lage ist, die Instationarität der Strömung mit vertretbarem Aufwand zu berechnen. Mit dem entwickelten Verfahren ist es möglich, beliebige Grobstrukturmodelle (LES) mit unterschiedlichen statistischen Modellen (RANS) zu koppeln. Konkret wird dabei auf LES-Seite das Nullgleichungsmodell nach Smagorinsky (1963) in der ursprünglichen und in der dynamischen Form (nach Germano et al., 1991) sowie das Eingleichungsmodell nach Yoshizawa (1985) verwendet. Auf RANS-Seite kommen im Bereich der Zweigleichungsmodelle das Chien-Modell (1982), das Launder-Sharma-Modell (1974) sowie ein auf der homogenen Dissipation (Jakirlić und Hanjalić, 2002) basierendes k - ε_h -Modell zum Einsatz. Als fortgeschritteneres Modell wird das Viergleichungsmodell k - ε - ζ - f (Hanjalić et al., 2004) verwendet.

Schlüsselfrage bei der Kopplung sind die Maßnahmen und Verfahren in Bezug auf die Trennfläche zwischen den beiden Methoden. Diesbezüglich werden in der Arbeit drei Verfahren vorgeschlagen. Als erstes ist ein indirektes oder auch implizites Blenden zu nennen, welches auf einfache aber effektive Weise einen möglichst kon-

tinuierlichen Übergang der RANS-Werte zur LES-Seite ermöglicht. Der zweite wesentliche Punkt ist die Verwendung einer speziellen „forcing“-Technik, welche durch Erzeugung künstlicher, korrelierter Fluktuationen den Informationsverlust durch die starke Dämpfung in der RANS-Schicht ausgleicht. Dabei wird wie auch im ersten Fall vor allem Wert auf Einfachheit, Effizienz und die Anwendbarkeit im Fall komplexer Geometrien gelegt. Der dritte Punkt ist die Verwendung einer variablen, im Laufe der Rechnung sich selbst adaptierenden Trennfläche. Zur Positionierung dieser Trennfläche werden mehrere Möglichkeiten im Programm vorgesehen.

Mit Hilfe zahlreicher Testfälle wird die Tauglichkeit des Verfahrens in den unterschiedlichsten Strömungskonfigurationen und Situationen untersucht. Dabei werden sowohl Fälle mit niedrigen, als auch mit hohen Reynoldszahlen, von ihrer Struktur her ein-, zwei- und dreidimensionale, isotherme und temperaturabhängige sowie Probleme mit konstanten und variablen Stoffwerten betrachtet. Es stellt sich heraus, dass das LES/RANS-Verfahren vielversprechende Ergebnisse liefert, die in vielen Fällen eine erhebliche Reduzierung der Gitterpunkte im Vergleich zu einer reinen LES erlauben. Bezüglich der räumlichen Auflösung sind Vergrößerungen um einen Faktor von ca. 4 - 8, bezüglich der zeitlichen Auflösung eine Erhöhung der Schrittweite um einen Faktor von 2 - 4 bei vergleichbarem Ergebnis möglich. Insbesondere bei integralen und wandbezogenen Werten zeigt sich beim hybriden Verfahren mit geringfügiger Erhöhung des Aufwands eine deutliche Verbesserung gegenüber der LES auf dem gleichen Gitter.

In der Anwendung auf die Strömung und Vermischung in zwei industrierelevanten Brennkammergeometrien inklusive Drallerzeuger lässt sich dieses Verhalten bestätigen, so dass ein wertvolles Werkzeug für die Berechnung zur Verfügung steht. Größter Vorteil liegt bei den aus dem Drallerzeuger kommenden Profilen und den turbulenten Scheinspannungen innerhalb der Kammer, welche nicht die für grobe LES typische starke Überbewertung aufweisen.

Abstract

A hybrid LES/RANS method for conjugated flow, heat and mass transfer with relevance to combustor configurations

An important aspect concerning the improvement of durability, environmental compatibility and general operating performance of gas turbine combustion chambers is the correct representation of the unsteady processes inside the chamber and the thermal load of combustor walls, i.e. the wall temperature development. Due to geometrical complexity and associated difficulties (from the computational point of view) and the demand for low computational costs the so-called RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes) methods are mostly in use for industrial flow calculations. These methods describe well the general character of the flow, however, due to the time averaging, the unsteady effects are captured insufficiently or not at all. This fact represents an important weakness when dealing with the flow configurations dominated by the large scale unsteadiness, as encountered e.g. in the separating and reattaching flows. The large-eddy simulation (LES) method, by which the large turbulence eddies are resolved directly and the influence of the small eddies is modelled, is regarded as a suitable remedy for the above-mentioned weaknesses. This method is capable to capture the largest portion of the energy containing eddies being most responsible for the turbulent energy transport. However, the price for this are multiply increased computational costs, which are mainly determined by the fact, that the near-wall region has to be appropriately fine resolved.

At this point the hybrid LES/RANS method, whose development was the main objective of the present work, comes into play. The goal is to combine the advantages of LES and RANS in order to provide a method which is capable to capture most of the low range (mean flow) and high range (turbulent fluctuations) frequencies in a turbulent flow but at affordable costs. The hybrid formulation proposed enables combinations of any LES, i.e. Subgrid-stress model in the outer layer (flow core) with different, eddy-viscosity based RANS models employed in the wall region. In the present work both the zero equation model due to Smagorinsky (1963) and its dynamic variant (due to Germano et al., 1991) as well as the one-equation model of Yoshizawa (1985) are applied. In the RANS subregion different two-equation models (e.g., Chien model and Launder-Sharma model) and a model based on the homogeneous dissipation concept $k-\varepsilon_h$ (Jakirlić and Hanjalić, 2002) are used. The most-advanced turbulence model used in this work is the four equation $k-\varepsilon-\zeta-f$ model, based on the elliptic-relaxation concept (Hanjalić et al., 2004).

Key question in a hybrid LES/RANS model scheme is concerned with the coupling of both methods, the inherently steady RANS method and highly-unsteady LES method, along the interface separating two subregions. In the present work large attention was paid to this problem and following three issues were highlighted. First, an indirect, i.e. an implicit exchange of the depending variables between the LES and RANS subregions was proposed, which in a simple but effective manner enables a smooth transition from the RANS to the LES flow region. Second issue addresses the usage of a special forcing technique, which compensates the loss of information due to strong damping in the RANS region by creation of artificial and correlated fluctuations. Hereby, in line with the first issue great importance is attached to simplicity, efficiency and applicability to complex geometries. The third important point is the utilization of an in-the-course-of-the-simulation self-adjusting interface. For the appropriate interface positioning several options reflecting different control parameters are provided within the computational program.

The model validation is conducted interactively by computing numerous test cases of different geometrical complexity featuring different mean flow and turbulence phenomena with relevance to the swirl combustor configurations, including low and high Reynolds number cases, isothermal and temperature dependant cases as well as the flows with constant and variable fluid properties. The results obtained with the newly proposed hybrid LES/RANS method exhibit very good agreement with the available reference (experimental, DNS and highly-resolved LES) database. The employment of the present hybrid model enables a substantial reduction of the number of grid points compared to conventional LES method. Concerning spatial and temporal resolution a coarsening by a factor of 4 to 8 and 2 to 4 respectively is shown to be possible by the results quality being comparable to the LES method. It is particularly valid for the integral and wall-related characteristics, which, at marginal increase of the costs (among others, more equations are solved in the hybrid framework), show a considerable improvement compared to the LES on the same grid.

Finally, the results obtained by applying the present hybrid model to the flow and mixing in two industrially relevant combustor geometries (tubo-annular combustor and single-annular combustor) including the entire inlet section with swirl generator could confirm its high predictive capability.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und Formelzeichen	xi
1 Einführung	1
1.1 Aufgabenstellung und Ziele der Arbeit	2
1.2 Stand der Forschung	3
1.3 Aufbau und Funktionsweise von Gasturbinenbrennkammern	6
1.4 Aufbau der Arbeit	8
2 Theoretische Grundlagen	9
2.1 Strömungsmechanische Grundgleichungen	9
2.2 Turbulenz	12
2.2.1 Statistische Beschreibung	14
2.2.2 Zeit- und Längenskalen in der Turbulenz	16
2.2.3 Spektrale Betrachtungsweise	19
2.2.4 Strömung und Turbulenz in Wandnähe	21
2.2.5 Numerische Simulation der Turbulenz	25
2.3 Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS)	27
2.3.1 Modelle basierend auf der turbulenten Viskosität (EVM)	28
2.3.1.1 Algebraische Turbulenzmodelle	29
2.3.1.2 Ein- bzw. Zweigleichungsmodelle	30
2.3.1.3 Das Konzept der homogenen Dissipation	32
2.3.1.4 Das k- ϵ - ζ -f-Modell	33
2.3.2 Die Reynoldsspannungsmodelle (RSM)	34
2.4 Large-Eddy Simulation (LES)	35
2.4.1 Das Smagorinsky-Modell	37
2.4.2 Das Yoshizawa-Modell	38
3 Numerische Verfahren	39
3.1 Das numerische Gitter	40
3.2 Die Finite-Volumen-Methode (FVM)	42
3.2.1 Diskretisierung der diffusiven Terme	44
3.2.2 Diskretisierung der konvektiven Terme	46
3.3 Zeitdiskretisierung	49
3.4 Gleichungslöser	52

3.4.1	Direkte Verfahren	53
3.4.2	Iterative Verfahren	53
3.5	Druck-Geschwindigkeitskopplung	55
3.6	Randbedingungen	57
3.7	FASTEST	58
4	Zur Methode des hybriden LES/RANS-Verfahrens (HLR)	59
4.1	Anforderungen an das Modell	61
4.2	Modellentwicklung	62
4.3	A-priori-Untersuchungen	64
4.4	Gekoppelte Berechnung	69
4.4.1	Eine analytische Betrachtung	74
4.4.2	Blending	76
4.4.3	Forcing	93
4.4.4	Art und Position der Trennfläche	101
4.4.5	Kombination mit anderen Modellen	110
4.4.6	Wärme- und Stofftransport	115
4.5	Übersicht über die aktuelle Methode	117
5	Testfälle	121
5.1	Kanalströmung	122
5.2	Stufenströmungen	130
5.2.1	Isotherme Berechnung	131
5.2.2	Berechnung mit Wärmeübertragung	134
5.2.3	Berechnung mit Wärmeübertragung und variablen Stoffwerten	144
5.3	Periodische Strömung über einen zweidimensionalen Hügel	158
5.4	Strömung über ein auf einer Wand montiertes Flügelprofil	165
5.5	Strömung über einen dreidimensionalen Hügel	177
5.6	Zusammenfassung der Untersuchungen anhand der Testfälle	185
6	Anwendung auf Brennkammerströmungen	187
6.1	Ringbrennkammer	187
6.1.1	Berechnung ohne Sekundärlufteinblasung ($J = 0$)	190
6.1.2	Berechnung mit Sekundärlufteinblasung ($J = 100$)	194
6.2	Rohrbrennkammer	198
6.2.1	Berechnung der ersten Konfiguration	201
6.2.2	Berechnung der zweiten Konfiguration	211
7	Zusammenfassung und Ausblick	219
	Literaturverzeichnis	221
	Abbildungsverzeichnis	227
	Tabellenverzeichnis	235

Abkürzungen und Formelzeichen

Abkürzungen

avg	average, Mittelwert einer Variablen
BK	Brennkammer
CDS	Central Differencing Scheme, Zentralknotenverfahren
CFD	Computational Fluid Dynamics, numerische Strömungssimulation
CFL	Courant-Friedrichs-Levy-Bedingung
DES	Detached-Eddy Simulation
DNS	Direct Numerical Simulation, direkte numerische Simulation
Exp	Experiment
Germ	Germano-Modell
HLR	hybrides LES/RANS-Verfahren
It	Iteration
KV	Kontrollvolumen
KZF	k- ε - ζ -f-Modell
LDA	Laser-Doppler-Anemometrie
LES	Large-Eddy Simulation, Grobstruktursimulation
LS	Lauder-Sharma-Modell
M	Million
PDF	probability density function, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
PIV	Particle-Imaging-Velocimetry
PSD	power spectral density, Leistungsdichtespektrum
PVC	precessing-vortex-core, umlaufende Wirbelinstabilität
QUICK	Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes, zeitgemittelte Simulation
RMS	root mean square, Wurzel der gemittelten Quadrate einer Größe
SFB	Sonderforschungsbereich
SGS	subgrid-scale, nicht aufgelöster Bereich bei einer LES
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
Smag	Smagorinsky-Modell
UDS	Upwind Differencing Scheme, Upwind Differenzenverfahren
URANS	Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes, instationäre RANS-Simulation
Yosh	Yoshizawa-Modell

lateinische Formelzeichen

a_n	Diskretisierungs-Koeffizienten ($n = P, E, W, N, S, e, w, n, s$)
\mathbf{A}	Koeffizientenmatrix
A	Fläche
\mathbf{b}	Matrix der Quellterme und rechten Seiten der diskretisierten Gleichungen
\mathbf{B}	Matrix

c_p, c_v	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck/konstantem Volumen
C_f	Reibungsbeiwert
C_n	Modellkonstanten ($n = \mu, \varepsilon, s, \tau, L, \eta$)
C_p	Druckbeiwert
D	Durchmesser; Diffusionskoeffizient
e	innere Energie
e_{ij}	Verzerrungstensor
E	Energiespektrum
f	Frequenz; Relaxationsfunktion
H, h	charakteristische Höhe
J	Impulsverhältnis; Jakobi-Determinante
k	turbulente kinetische Energie
L	Integrales Längenmaß
\dot{m}	Massenstrom
p	Druck; Wahrscheinlichkeit
\dot{q}	spezifischer Wärmestrom
R	Radius
R_{ij}	Korrelationsfunktion
S	Scherrate, $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$; Drallzahl
S_{ij}	Verzerrungstensor
S_n	Quellterme in Impulsgleichungen ($n = u, v, w$)
t	Zeit
T	Temperatur
Tu	Turbulenzgrad, $Tu = \sqrt{2k/3}/U_{ref}$
u, v, w	kartesische Geschwindigkeitskomponenten (u_i)
U, V, W	gemittelte kartesische Geschwindigkeitskomponenten (in Abbildungen)
u_τ	Schubspannungsgeschwindigkeit, $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$
u^+	dimensionslose Geschwindigkeit, $u^+ = u/u_\tau$
V	Volumen
WD, y	wall distance, Wandabstand
x, y, z	kartesische Ortsvariablen (x_i)
y^+	dimensionsloser Wandabstand, $y^+ = yu_\tau/\nu$

griechische Formelzeichen

α	Wärmeübergangskoeffizient; allgemeiner Diffusionskoeffizient
δ_{ij}	Kronecker-Delta
δ	Grenzschichtdicke
Δ	Filterweite; Differenz einer Größe
ε	Dissipation der turbulenten kinetischen Energie
η, η_k	Kolmogorov'sches Längenmaß
Θ	dimensionslose Temperatur
θ	Impulsverlustdicke
κ	Wellenzahl; Konstante, $\kappa = 0.41$

λ	Wärmeleitfähigkeit; Taylor Längenmaß
μ	dynamische Viskosität des Fluids
∇	Nabla-Operator
ν	kinematische Viskosität des Fluids
ϕ	stellvertretende Variable für ein Skalar
Φ	Dissipationsfunktion
ρ	Dichte des Fluids
ρ_{ij}	Korrelationskoeffizient
σ	Standardabweichung; Modellkonstante
τ_{ij}	Spannungstensor
τ_w	Wandschubspannung
ξ	Mischungsgrad
ζ	Variable im k - ε - ζ - f -Modell, $\zeta = \overline{v^2}/k$

Indizes

ax	axial
C	Konvektion
D	Diffusion
i, j, k	Laufvariablen
$ifce$	Interface, Trennfläche
ko	koaxial
mod	modellierter Anteil
res	aufgelöster Anteil
t	turbulent
w	Wand
$+$	dimensionslose Größe
∞	in ungestörter Anströmung; im Unendlichen

Akzente

$'$	Fluktuation einer Größe (RANS); nicht aufgelöster Anteil (LES)
$\hat{\cdot}$	räumliche Filterung
$\bar{\cdot}$	zeitliche Mittelung

Dimensionslose Kennzahlen

$Ma = u/a$	Mach-Zahl
$Nu = \alpha L/\lambda$	Nusselt-Zahl
$Pe = u L/a$	Peclet-Zahl
$Pr = \nu/a$	Prandtl-Zahl
$Re = u L/\nu$	Reynolds-Zahl
$Sc = \nu/D$	Schmidt-Zahl
$St = \alpha/(\rho u c_p)$	Stanton-Zahl

Kapitel 1

Einführung

Im Zeichen immer größer werdender Ansprüche an die Lebensdauer, Umweltverträglichkeit und generelle Funktionsweise von Strömungsmaschinen und -anlagen wird es zunehmend wichtiger, die Strömungsgrößen und -verhältnisse in deren Innern genau zu kennen. Aufgrund der oft beschränkten Zugänglichkeit zum Inneren solcher Systeme sowie nicht unerheblicher Kosten für experimentelle Untersuchungen haben die numerischen Berechnungsverfahren bereits regen Eingang in den Entwicklungsprozess gefunden. In der industriellen Entwicklung sind aufgrund der Komplexität der Konstruktionen zurzeit vorwiegend auf den zeitgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen beruhende, sogenannte Reynolds-Averaged Navier-Stokes-Verfahren (RANS) im Einsatz. Diese erfassen den generellen Charakter der Strömung gut. Bedingt durch die zeitliche Mittelung werden jedoch Details der Strömung (Ablösungen, Rezirkulationen) und vor allem instationäre Effekte schlecht oder überhaupt nicht erfasst. Gerade diese Effekte sind es jedoch, die heutzutage immer mehr in den Entwicklungsprozess miteinbezogen werden müssen.

Abhilfe kann die Methode der Large-Eddy Simulation (LES) schaffen, die den Großteil der oben genannten Effekte erfassen kann. Der Preis dafür ist jedoch ein um ein Vielfaches erhöhter Aufwand an Rechenzeit und Speicherplatz, dessen Größe vornehmlich durch die Notwendigkeit bestimmt wird, die Wände des Rechengebietes ausreichend genau zu erfassen. Dieser erhöhte Aufwand ist das zur Zeit größte Hindernis für die industrielle Nutzung dieser Methode.

An dieser Stelle setzen die hybriden LES/RANS-Verfahren (HLR) an, deren Ziel es ist, die Vorteile beider Verfahren zu kombinieren, um damit eine numerische Methode bereitzustellen, die auf der einen Seite dazu in der Lage ist, die Strömung mit ihren instationären Eigenschaften ausreichend gut zu erfassen, auf der anderen Seite aber nur einen begrenzten Aufwand mit sich bringt.

Schlüsselfrage bei diesen Verfahren ist die Art sowie die Behandlung der Trennfläche zwischen den beiden Methoden, die in ihrer ursprünglichen Konzeption sehr unterschiedlich sind. Während beim RANS-Ansatz zeitlich gemittelte Größen berechnet werden, sind es im Falle der LES räumlich gefilterte. Die Art und Weise ihrer Kopplung entscheidet unmittelbar über die Güte der Methode und steht damit im Mittelpunkt der Untersuchungen.

1.1 Aufgabenstellung und Ziele der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, ein hybrides LES/RANS-Verfahren zu entwickeln, welches die wandnahen Effekte mit einem RANS-Modell berücksichtigt und die großen Strukturen sowie den instationären Charakter der Hauptströmung mit Hilfe der Large-Eddy Simulation (LES) erfasst. Weiterhin soll das Verfahren getestet, validiert und auf ausgewählte technische Konfigurationen angewendet werden. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf Brennkammerströmungen bzw. auf den besonderen Strömungseigenschaften, die mit der Strömung in Brennkammern einhergehen. Diesbezüglich sind vor allem zu nennen:

- Turbulenz
- hoher Drall
- starke Stromlinienkrümmung
- große Temperatur- und Dichtegradienten
- mit hohen Temperaturen verbundene variable Stoffwerte

Auch die komplexe Geometrie einer Brennkammer inklusive Drallerzeuger und Sekundärlufteinblasung soll berücksichtigt werden. Neben der isothermen Strömung und der Wärmeübertragung spielt bei Brennkammerströmungen die Vermischung eine entscheidende Rolle, weshalb diese ebenfalls miteinbezogen werden soll.

Im Rahmen des Sonderforschungsbereiches (SFB) 568 „Strömung und Verbrennung in zukünftigen Gasturbinenbrennkammern“ soll das Verfahren dazu verwendet werden, die Brennkammer als Ganzes mit vertretbarem Aufwand zu simulieren. Als Software-Plattform wird das Berechnungsprogramm FASTEST verwendet, welches sich innerhalb des SFB 568 als Standard etabliert hat.

1.2 Stand der Forschung

Um eine Übersicht über den aktuellen Stand der Forschung in Bezug auf hybride LES/RANS-Verfahren zu erhalten, ist es angebracht, sich zunächst Gedanken zu deren Definition und Einteilung zu machen. Der Ausdruck „hybrid“ in seinem hier gemeinten Sinn hat seinen Ursprung im römischen und bedeutet „zwitterhaft, von zweierlei Herkunft“ [11]. In der Technik wird er dazu verwendet, eine Mischung oder Kombination aus unterschiedlichen Elementen oder Strategien zu beschreiben, die für sich alleine genommen auch schon eine Lösung darstellen, durch deren Kombination aber neue Eigenschaften entstehen. Für die Definition bedeutet dies zunächst, dass alle Verfahren, die LES- und RANS-Methoden in irgendeiner Weise kombinieren, hybride LES/RANS-Verfahren darstellen. Da sich die zwar noch relativ jungen, aber mittlerweile zahlreichen hybriden LES/RANS-Verfahren teilweise jedoch stark in ihrer Konzeption unterscheiden, ist es sinnvoll, eine etwas präzisere Einteilung vorzunehmen. Im Grunde lassen sie sich in zwei Hauptklassen einteilen, wobei es aus Erfahrung sinnvoll erscheint, eine Hauptklassen erneut zu unterteilen.

- Die sogenannten **nahtlosen Verfahren** sind dadurch gekennzeichnet, dass im kompletten Problemgebiet ein und dasselbe Turbulenzmodell verwendet wird, welches in der RANS-Zone als RANS-Modell fungiert, in der LES-Zone als LES-Modell. Erreicht wird dies meist dadurch, dass ein klassisches RANS-Modell durch Veränderung eines oder mehrerer Koeffizienten sensitiv für das verwendete Gitter gemacht wird. Damit sind die Primärgleichungen (Geschwindigkeit, Energie bzw. Temperatur, Mischungsgrad oder andere Skalare) im kompletten Strömungsgebiet gleich. Die Modellgleichungen (Turbulenzmodelle) sind bezüglich ihrer Anzahl und Form ebenfalls identisch in beiden Gebieten. Da es sich somit im Grunde nur um ein einzelnes Modell handelt, werden beide Gebiete automatisch simultan betrachtet.
- Im Falle der **zonalen Verfahren** ist das Modell auf beiden Seiten der Trennfläche zwischen den Zonen nicht unbedingt gleich und die Lösung muss nicht simultan erfolgen. Unterteilt werden kann diese Klasse noch einmal in
 - die *locker* zonalen Verfahren, bei denen zwar die Primärgleichungen identisch sind, die Modellgleichungen auf beiden Seiten aber komplett verschieden sein können. Demnach können also unterschiedliche Modelle kombiniert, aber beide Gebiete trotzdem wie bei den nahtlosen Verfahren simultan gelöst werden.
 - die *streng* zonalen Verfahren, im Falle derer wirklich eine strikte Trennung vorhanden ist, die Lösung aller Gleichungen also unabhängig voneinander und meist auch seriell erfolgt.

Das Problem der benötigten hohen Wandauflösung wurde bereits in den Anfängen der numerischen Simulation, damals noch im Rahmen von RANS-Modellen,

erkannt. Eine effiziente Lösung, die auch heute noch für RANS-Modelle weit verbreitet ist, wurde 1972 von Launder und Spalding [37] vorgeschlagen und sieht die Benutzung von Wandfunktionen vor, mit welchen das wandnahe Gebiet sozusagen überbrückt wird. Anstelle der Haftbedingung an der Wand wird damit in der wandparallelen Komponente die Wandschubspannung als Randbedingung im ersten Gitterpunkt vorgegeben und die Verbindung zur Wand durch Nullsetzen des jeweiligen Koeffizienten gekappt. Im Laufe der Jahre wurden die Wandfunktionen immer weiter entwickelt und generalisiert, so dass auch Anwendungen in Nicht-Gleichgewichtsströmungen und im LES-Bereich möglich wurden (Schumann 1975 [60], Piomelli et al. 1989 [52], Werner und Wengle 1991 [73], Hoffmann und Benocci 1995 [30], Temmerman et al. 2003 [68]). Einen anderen Ansatz als Wandfunktionen bei der Vorgabe der Wandschubspannung verfolgten Balares und Benocci mit ihrer „two-layer-method“ (TLM) und später der „thin shear layer method“ (TSL, 1996) [5]. Bei diesen Methoden wird die Wandschubspannung nicht über eine algebraische Beziehung, sondern über eine gesonderte Berechnung mit einem vereinfachten Gleichungssatz (Grenzschichtgleichung, eindimensional, zweidimensional), bestimmt. Damit stellen diese Verfahren im Hinblick auf obige Definition bereits hybride Berechnungsmethoden dar, auch wenn es sich dabei nicht um hybride LES/RANS-Verfahren handelt.

Das erste hybride LES/RANS-Verfahren wurde gemäß Baggett [3] bereits 1975 von Schumann [60] vorgeschlagen, der zur Unterstützung des subgrid-scale-Modells ein RANS-Mischungsweg-Modell nutzte. Ähnliche Versuche mit einer zusätzlichen inhomogenen subgrid-scale Viskosität unternahmen unter anderem Moin und Kim 1982 [46] sowie Sullivan 1994 [65], wenn sich auch die Formulierung des unterstützenden Modells von dem typischen RANS-Mischungsweg-Modell entfernte. Diese hybriden Modelle lassen sich in die Klasse der nahtlosen Verfahren einordnen. Das bisher erfolgreichste hybride Verfahren stammt ebenfalls aus der Klasse der nahtlosen Methoden und wurde 1997 von Spalart [63] unter dem Namen Detached-Eddy Simulation (DES) eingeführt. Ausgangsmodell ist hier das Spalart-Allmaras-Eingleichungsmodell für die turbulente Viskosität. Durch Änderung des Längenmaßstabes im Senkenterm der Gleichung wird dieses Modell zu einem SGS-Modell im LES-Gebiet, welches hauptsächlich in Gebieten abgelöster (detached) Strömung aktiv sein soll. Bis zu diesem Zeitpunkt wurde in allgemeiner Übereinstimmung RANS in Wandnähe und LES in der Kernströmung verwendet. Speziale (1998) und auch später Hamba (2001) gingen den umgekehrten Weg und versuchten, LES in der wandnahen Region zu benutzen. Dieser Ansatz stellte sich jedoch als nicht erfolgreich heraus. Ebenfalls 1998 machte Baggett detailliertere Versuche mit einem hybriden LES/RANS-Modell ähnlich Schumanns Modell und einem ähnlich der DES. Dabei entdeckte er, dass bei einer groben LES-Auflösung und damit verbunden einem großen Modellanteil in Wandnähe unphysikalisch große Wirbelstrukturen, sogenannte superstreaks, entstehen. Diese behinderten den Transport des wandnormalen Impulses und erzeugten dadurch bei gleicher Gitterauflösung einen nahezu linearen Anstieg der additiven Konstante im logarithmischen Wandgesetz bei reinen LES-Rechnungen. Auch die Benutzung eines RANS-Modells basierend auf der Mischungslänge könne seiner Meinung nach diese Situation nicht verbessern. Aus

diesem Grund schlug er vor, kompliziertere, möglicherweise auch anisotrope Modelle in der Nähe der Wand zu verwenden.

Im Jahr 2000 erweiterten Cabot und Moin [9] Balares' TSL-Methode, so dass in der unteren Schicht die kompletten Grenzschichtgleichungen für die Strömungs- und die Spannweitenrichtung gelöst wurden, wobei die Schubspannung mit Hilfe eines Mischungslängen-RANS-Ansatzes modelliert wurde. Um das Jahr 2001 herum starteten jedoch bereits die ersten Versuche mit Zweigleichungs-RANS-Modellen ($k - \omega$, $k - \varepsilon$) sowohl zonal (Davidson und Peng [14], Batten und Goldberg [7]), als auch nahtlos im Rahmen der sogenannten Partially-Integrated-Turbulence-Models (PITM) von Dejoan und Schiestel [58], welche ähnlich der DES den Längenmaßstab im Destruktionsterm eines Standard- $(k - \varepsilon)$ -Modells in der Weise veränderten, dass die Strömung rezeptiv für Instationaritäten wurde. Doch wie Baggett 1998 schon vorhergesagt hatte, konnte auch mit aufwändigeren Modellen und ohne spezielle Behandlung an der Trennfläche das Problem der superstreaks und des damit verbundenen zu geringen Impulstransports nicht gelöst werden, sondern manifestierte sich in Form eines Knicks (bump) im mittleren Geschwindigkeitsprofil. Während Temmerman, Leschziner und Hanjalić [67] zur Beseitigung dieses Knicks auf ein explizites blending des Modellparameters C_μ am Interface setzten, versuchten Davidson (2002) [12] und Piomelli (2003) [51] den durch das grobe Gitter bzw. den hohen Wert der turbulenten Viskosität verursachten Verlust an kleinskaligen Bewegungen durch die zusätzliche Überlagerung von spektralem forcing auszugleichen. Piomelli griff dabei auf ein schon von Mason und Thomson 1992 [43] benutztes und von Leith [39] vorgeschlagenes backscatter-Modell zurück. Davidson versuchte zu Anfang, Fluktuationen aus auf das Problem skalierten a-priori DNS Rechnungen zu verwenden und testete schließlich 2005 auch die Verwendung künstlich erzeugter Fluktuationen. Mit der zunehmenden Etablierung der hybriden LES/RANS-Verfahren traten neben der bis dahin vor allem bei den zonalen Verfahren fast ausschließlich verwendeten Kanalströmung auch andere, kompliziertere Geometrien als Testfälle in den Vordergrund. Als wichtigste sind hier der periodische zweidimensionale Hügel (Fröhlich, Breuer) und der dreidimensionale Hügel (Davidson, Leschziner) zu nennen.

Ein weiteres interessantes Verfahren ist die sogenannte scale-adaptive-simulation (SAS), welche 2003 von Menter [45] eingeführt wurde. Hier werden klassische Wirbelviskositäts-RANS-Modelle durch die Berücksichtigung normalerweise vernachlässigter Terme in den Modellgleichungen sensitiv für Fluktuationen gemacht. Aus diesem Grund stellt dieses Verfahren jedoch eher einen erweiterten URANS-Ansatz, als ein hybrides LES/RANS-Verfahren dar.

Der Schritt zu Reynoldsspannungsmodellen als Kopplungspartner für LES ist bisweilen zurückhaltend betrachtet worden. Das Fehlen an numerischer Robustheit sowie der hohe Berechnungsaufwand gestalten deren Benutzung problematisch, zumal der im voraus erhoffte Vorteil an Genauigkeit im Vergleich zu Wirbelviskositätsmodellen im Rahmen der hybriden LES/RANS-Verfahren im Allgemeinen bezweifelt wird.

1.3 Aufbau und Funktionsweise von Gasturbinenbrennkammern

Die Aufgabe der Brennkammer in einer Gasturbine besteht in der Zufuhr von Energie an die verdichtete Luft. Diese Energie wird dann in der Turbine in Wellenleistung und in der Düse in Schub umgewandelt. Erreicht wird die Energiezufuhr durch Verbrennung eines Gemisches aus Brennstoff und Luft. Während bei stationären Gasturbinen unterschiedliche Brennstoffe in Frage kommen, wird für Flugzeugtriebwerke heutzutage fast ausschließlich Kerosin verwendet, welches durch seinen hohen Heizwert bei hoher Dichte ein geringes Tankvolumen erlaubt. Abb. 1.1 zeigt den

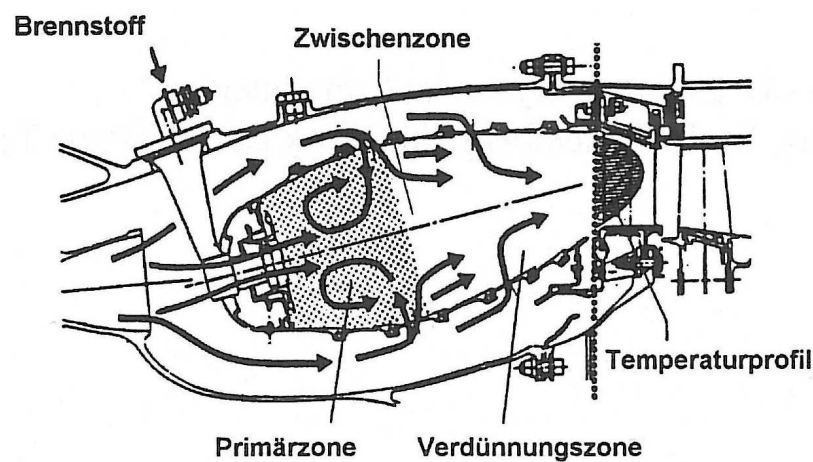


Abbildung 1.1: Aufbau einer Brennkammer aus [29]

Aufbau einer typischen Triebwerksbrennkammer. Vor dem eigentlichen Brennraum befindet sich ein Eintrittsdiffusor, der die Geschwindigkeit des aus dem Verdichter kommenden Luftstroms reduziert. Danach wird der Luftstrom in Primärluft und Sekundärluft aufgeteilt. Ein Teil der Primärluft strömt durch den sogenannten Drallerzeuger direkt in den Brennraum ein. Durch den der Strömung aufgeprägten Drall entsteht unmittelbar hinter dem Drallerzeuger ein Rückströmgebiet, welches zur Stabilisierung der Flamme verwendet wird. Eine weitere Aufgabe der verdrehten Luft ist die Mithilfe bei der Zerstäubung des noch flüssigen Brennstoffes. Dieser wird, je nach Bauart unterschiedlich, aber im Prinzip immer ähnlich, innerhalb des Drallerzeugers so eingespritzt, dass er am Austritt auf den verdrehten Luftstrom trifft und durch die hohe Scherung zerstäubt wird. Teilweise ist er dabei selbst noch verdreht, oder wird zwischen zwei Luftströmen zerstäubt. Damit wird die gesamte Einheit von Drallerzeuger und Einspritzung zum Druckluftzerstäuber. Der Rest der Primärluft strömt durch die erste Reihe Löcher im Flammrohr in die Primärzone der Brennkammer. Während die Primärluft, welche nur ca. 10-18% der gesamten Verdichterluft ausmacht, für die Sauerstoffzufuhr zuständig ist, wird die Sekundärluft als Kühlluft, Mischluft oder auch Zwischenluft verwendet. Als Kühlluft kühlt sie dabei das Flammrohr sowohl von außen, als auch von innen, indem sie durch weitere

Lochreihen relativ flach in das Innere des Flammrohres einströmt und einen Kühlfilm auf dessen Innenseite bildet. Da in der Praxis in der Primärzone meist nicht der gesamte Brennstoff verbrannt werden kann, wird, sofern nicht zur Kühlung benötigt, noch Zwischenluft durch weitere Lochreihen eingeblasen, um den restlichen Brennstoff zu verbrennen. Am Ende des Flammrohres wird schließlich Mischluft ins Innere gebracht, um die dort noch sehr hohe Temperatur für den Eintritt in die Turbine abzusenken und ein bestimmtes, meist radial leicht ansteigendes Temperaturprofil am Brennkammeraustritt zu erreichen. Unterschieden werden im Allgemeinen drei Brennkammerarten (Abb. 1.2):

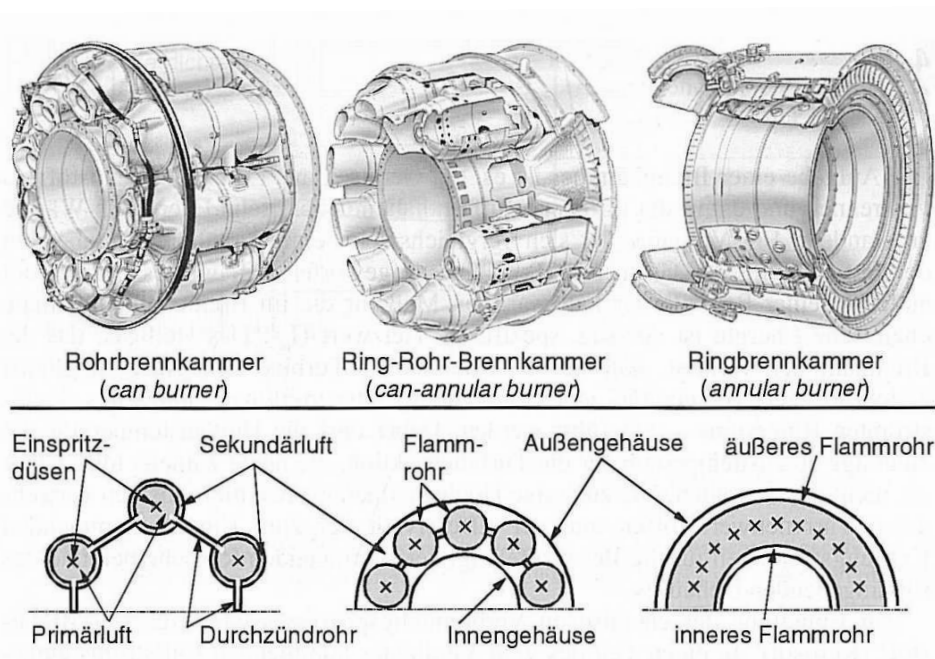


Abbildung 1.2: Verschiedene Brennkammerarten aus [8]

Die **Rohrbrennkammer** besteht im Prinzip aus mehreren, ca. 8-14 getrennten Einzelbrennkammern, welche alle ein eigenes Primär- und Sekundärluftsystem besitzen. Der modulare Aufbau macht Rohrbrennkammern zwar sehr wartungsfreundlich, diesem Vorteil steht jedoch ein höheres Gewicht und der meist große Querschnitt gegenüber, so dass diese Brennkammerart in modernen Triebwerken selten verwendet wird. Anwendung findet sie gelegentlich noch in Kleintriebwerken, APU's oder in Triebwerken mit Radialverdichter (Hubschrauber, Turboprops), denn der dem Radialverdichter immer nachgeschaltete Diffusor teilt den Luftstrom ohnehin schon in mehrere Teilströme auf.

Die **Ring-Rohrbrennkammer** stellt gegenüber der reinen Rohrbrennkammer dahingehend eine Verbesserung dar, dass bei gleichem Querschnitt mehr Brennräume untergebracht werden können. Der Bereich der Sekundärluft, der jetzt nicht mehr getrennt ist, sondern alle Brennräume umschließt, kann ebenfalls effizienter gestaltet werden. Obwohl es auch einen gemeinsamen Brennkammeraustritt gibt, ist es

allerdings immer noch schwierig, ein homogenes Temperaturprofil für den Eintritt in die Turbine zu erzeugen, so dass diese meist mit einem schlechten Wirkungsgrad arbeitet. Deshalb wird diese Brennkammerart, die früher aufgrund ihrer robusten Bauweise häufig für Großtriebwerke eingesetzt wurde, heutzutage kaum noch verwendet.

Die **Ringbrennkammer** stellt die heutzutage am meisten verwendete Brennkammerart dar. Sie lässt sich kompakt, leicht sowie relativ einfach bauen und ist strömungsmechanisch sehr effizient, da von Verdichter bis zur Turbine kaum Umlenkung erfolgt. Probleme gibt es allerdings bezüglich der Festigkeit, da sich das Flammrohr, bzw. der Flammring durch die hohe Temperatur und seine relativ große Fläche leicht verformt. Weiterhin ist die Wartung und Reparatur aufwändiger, denn Teile müssen meist komplett, anstatt modular ausgetauscht werden.

1.4 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in sieben Kapitel. Nach der Vorstellung der Zielsetzungen der Arbeit sowie einem Einblick in den Stand der Forschung im Bereich der hybriden LES/RANS-Verfahren und in den Stand der Technik von Gasturbinenbrennkammern schließt das erste Kapitel mit der Übersicht über den Aufbau der Arbeit ab. Im zweiten Kapitel werden theoretische Grundlagen zu den Themen Strömungsmechanik, Turbulenz sowie Turbulenzmodellierung behandelt. Danach folgt im dritten Kapitel die Vorstellung der wichtigsten angewendeten numerischen Verfahren. Kapitel vier beschäftigt sich mit der Methode des entwickelten hybriden Modells und den dazu nennenswerten Aspekten. Im darauf folgenden Kapitel wird schließlich auf die untersuchten Konfigurationen eingegangen, mit Hilfe derer das hybride Verfahren getestet und validiert wurde. Die Anwendung des Verfahrens auf Brennkammerströmungen wird in Kapitel sechs behandelt, bevor im letzten Teil die wichtigsten Ergebnisse noch einmal zusammengefasst werden sowie ein Ausblick über mögliche zukünftige Arbeiten gegeben wird.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die theoretischen Grundlagen, auf denen die Arbeit aufbaut, zusammenfassend darzustellen. Damit soll es dem Leser ermöglicht werden, die behandelten Themen besser zu verstehen oder bei Unklarheiten, die aus dem Lesen der Arbeit heraus entstehen, eine erste Anlaufstelle zu haben. Für detaillierte Informationen zu den angesprochenen Themen sei auf tiefergehende Literatur ([4], [26], [53], [59], [64]) verwiesen, auf der auch der Großteil der folgenden Ausführung beruht.

2.1 Strömungsmechanische Grundgleichungen

Der Ausgangspunkt aller strömungsmechanischen Berechnungen sind die allgemeinen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad (2.3)$$

welche im Grunde aussagen, dass die Masse eines geschlossenen Systems erhalten bleiben muss, eine Änderung des Impulses durch Kräfte und eine Änderung der Energie durch Leistungs- bzw. Wärmezufuhr oder -abfuhr erfolgt. Bei diesen Gleichungen wird das zu untersuchende Fluid als ein Kontinuum betrachtet, welches aus unendlich vielen sogenannten Flüssigkeitsteilchen besteht. Die Eigenschaften des Fluids werden dabei durch die Zustandsgrößen Druck p , Dichte ρ , Temperatur T , innere Energie e und Entropie s beschrieben, so dass die Teilchen in der weiteren Behandlung nicht mehr explizit auftauchen. Der diesem Modell zugrundeliegende Teilchencharakter spiegelt sich jedoch weiterhin in der Tatsache wider, dass auf der

linken Seite der Gleichungen, auf der die jeweilige Änderung der Bilanzgröße auftaucht, die sogenannte materielle Ableitung

$$\frac{D\phi}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{\text{lokale zeitliche Änderung}} + \underbrace{u_j \frac{\partial\phi}{\partial x_j}}_{\text{konvektive Änderung}} \quad (2.4)$$

zur Anwendung kommt. Materiell bedeutet in diesem Zusammenhang, dass es sich um eine teilchenbezogene Änderung handelt. In dem ortsfesten Koordinatensystem bzw. Kontrollvolumen, für welches die Gleichungen (2.1)-(2.3) aufgestellt sind, setzt sich diese aus zwei Anteilen zusammen. An einem festen Punkt in der Strömung trägt der erste Anteil der lokalen Änderung der Größe (z.B. Temperatur) Rechnung. Der zweite Anteil berücksichtigt, dass sich die Strömung und damit die Teilchen weiterbewegen, so dass sich an dem festen Punkt die betrachtete Größe auch durch diese Konvektionsbewegung ändern kann. Aus diesem Grund wird im zweiten Term von (2.4) die Teilchengeschwindigkeit $u_j(x_i, t)$ verwendet. Dies ist der wesentliche Unterschied der materiellen Ableitung gegenüber der totalen Ableitung, bei welcher an dieser Stelle die Absolutgeschwindigkeit $c_j(x_i, t)$ verwendet wird. Damit ist der Term auf der linken Seite in der Erhaltungsgleichung für den Impuls (2.2), in dem die Strömungsgeschwindigkeit ohnehin schon als zu transportierende Variable auftaucht, für den nichtlinearen Charakter dieser Gleichungen verantwortlich. Dieser nichtlineare Charakter macht es überhaupt erst möglich, das Turbulenz, auf welche später noch detailliert eingegangen wird, entsteht.

Ausgangspunkt für alle im Laufe der Arbeit gezeigten Berechnungen sind die **Navier-Stokes'schen Gleichungen**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ji} \right) \right] \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i e)}{\partial x_i} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (2.7)$$

welche aus den allgemeinen Bilanzgleichungen (Masse, Impuls, Energie) in Verbindung mit dem Materialgesetz für Newton'sche Fluide

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \underbrace{2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu e_{kk} \delta_{ij}}_{\text{Reibungsspannungstensor } P_{ij}} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (2.8)$$

und dem Fourier'schen Gesetz

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.9)$$

entstehen. In Verbindung mit numerischen Untersuchungen wird dabei überwiegend die oben angegebene Form, nicht die Form von (2.1)-(2.3) verwendet, bei welcher

die Dichte auf der linken Seite vor der materiellen Ableitung steht. Beide Formen sind äquivalent und unterscheiden sich lediglich durch die Einbeziehung der Kontinuitätsgleichung auf der linken Seite. Der Grund für die Benutzung der zweiten Form hängt mit der späteren Verwendung der Finite- Volumen-Methode zusammen. Dabei werden über den Gauß'schen Integralsatz Volumenintegrale in Flächenintegrale umgewandelt, was mit der ersten Form durch Fehlen der Divergenz nicht direkt möglich ist. Zusätzlich wurde von der Stokes'schen Hypothese Gebrauch gemacht, nach welcher die Druckzähigkeit $\mu_D = \lambda^* + 2/3 \mu = 0$ ist.

Damit wird auf den ersten Blick eine starke Einschränkung eben auf solche Fluide gemacht, die diesen einfachen Materialgesetzen gehorchen. In der Praxis hat sich jedoch herausgestellt, dass die Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Verzerrung und Spannung bzw. zwischen Temperaturgradient und Wärmestrom für den Großteil der technischen Anwendungen ausreichend gut erfüllt ist. Die Limitierung auf diesen Satz an Gleichungen stellt somit auf den zweiten Blick nur eine kleine Einschränkung dar, durch welche die vorgeschlagene Methode auch nicht beeinflusst wird. Mit geringen Änderungen könnte es auch auf andere Materialgesetze angewendet werden.

Eine größere Einschränkung geht dagegen mit der sogenannten „**Approximation für niedrige Machzahlen**“ einher. Diese besagt, dass Kompressibilitätseffekte bei Machzahlen unterhalb etwa 0.3 vernachlässigbar sind. Wichtig an dieser Stelle ist, dass diese Einschränkung nicht mit Inkompressibilität gleichzusetzen ist, welche durch $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ definiert ist. Es ist also immer noch möglich, eine veränderliche Dichte zu erfassen, was Grundvoraussetzung für die Berechnung von Verbrennungsprozessen oder Strömungen mit starker Wärmezufuhr ist. Die angesprochene Einschränkung ist eher in der Limitierung der Geschwindigkeit zu sehen, obwohl trotzdem noch hohe Geschwindigkeitsbereiche erfasst werden können. Nimmt man z.B. Luft bei Umgebungstemperatur, können durchaus Konfigurationen mit Geschwindigkeiten bis zu 100 m/s oder 360 km/h berücksichtigt werden. Der Grund, warum diese Einschränkung in Kauf genommen wird, steht in Verbindung mit den numerischen Verfahren, auf die im nächsten Kapitel näher eingegangen wird. An dieser Stelle sei nur erwähnt, dass die andere Klasse der Berechnungsverfahren, welche sich für kompressible Medien eignet, gerade bei niedrigen Machzahlen wie sie z.B. in Brennkammern auftreten ($Ma \approx 0.1$) große Probleme haben. Mit Vernachlässigung der Kompressibilitätseffekte geht außerdem noch eine wichtige Vereinfachung bezüglich der Dichte einher. Diese kann zwar veränderlich sein, hängt aber im Gegensatz zu kompressiblen Strömungen nicht vom Druck, sondern nur von der Temperatur ab. Damit vereinfacht sich die Energiegleichung (2.3) zu einer Transportgleichung für die Temperatur. Zum Umschreiben auf die gezeigte Form muss neben der Kontinuitätsgleichung noch verwendet werden, dass die spezifische Wärme c_p konstant ist. Der Term auf der rechten Seite, der die Viskosität enthält, wird dabei auch als Dissipationsfunktion Φ bezeichnet:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i c_p T)}{\partial x_i} = \underbrace{\mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right]}_{P_{ij} \partial u_i / \partial x_j = P_{ij} e_{ij} = \Phi} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (2.10)$$

Um im Folgenden die Verfahren und Vorgehensweisen zu beschreiben, werden der Einfachheit halber trotzdem die inkompressiblen Gleichungen verwendet:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i c_p T)}{\partial x_i} = \Phi + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (2.13)$$

Neben den Bilanz- und Materialgleichungen sollte an dieser Stelle noch auf kinematische Beziehungen eingegangen werden, allen voran die Verzerrung und die Verdrehung von Flüssigkeit, denn diese Größen spielen eine entscheidende Rolle bei der Turbulenzmodellierung.

Betrachtet man die Flüssigkeit an einem Ort \vec{x} und an einem davon infinitesimal entfernten Ort $\vec{x} + d\vec{x}$, dann kann die Geschwindigkeit dort im Allgemeinen durch eine Translation mit der Geschwindigkeit $u_i(\vec{x}, t)$, eine Verzerrung in Richtung der Hauptachsen und eine Rotation um diese beschrieben werden:

$$u_i(\vec{x} + d\vec{x}, t) = u_i(\vec{x}, t) + e_{ij} dx_j + \Omega_{ij} dx_j \quad (2.14)$$

Der Verzerrungstensor e_{ij} und der Verdrehungstensor Ω_{ij} stellen die Zerlegung des Geschwindigkeitsgradienten in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil dar:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.15)$$

Da es sich bei der Rotation um eine Starrkörperrotation handelt, liefert Ω_{ij} keinen Beitrag zu den Reibungsspannungen, denn diese werden ausschließlich durch Formänderungen verursacht. Folglich tritt nur e_{ij} im Materialgesetz auf (vgl. (2.8)). Da die Verzerrung auch eine wesentliche Rolle bei der Erzeugung von Turbulenz spielt, wird der Verzerrungstensor e_{ij} in vielen Turbulenzmodellen als Modellierungsparameter, jedoch meist unter dem Namen S_{ij} für „strain“, verwendet.

2.2 Turbulenz

Die Charakterisierung von Turbulenz erfolgt in der Literatur auf unterschiedlichste Weisen. Am häufigsten werden die Wörter stochastisch, ungeordnet, zufällig, unregelmäßig oder unvorhersagbar verwendet. Nach der mathematischen Theorie wird durch nichtlineare dynamische Systeme jedoch ein deterministisches Chaos beschrieben, welches nicht zufällig im mathematischen Sinne ist, sondern bei Vorgabe identischer Anfangs- und Randbedingungen im Gegensatz zum Zufall das gleiche Ergebnis liefern würde. Diese Systeme haben jedoch die Eigenschaft, dass ihre Lösung so empfindlich auf unterschiedliche Randbedingungen reagiert, dass es in der

Realität bei einer Wiederholung z.B. eines Experimentes nie möglich ist, die exakt gleichen Anfangs- und Randbedingungen wie beim ersten Mal zu realisieren. Folglich wird auch das Ergebnis nicht das gleiche sein, so dass Turbulenz im Allgemeinen trotzdem mit Zufall in Verbindung gebracht wird. Wichtig für die weitere Beschreibung der Turbulenz ist, dass sich diese komplexe Fluidbewegung in räumlichen und zeitlichen Schwankungen der Strömungsgrößen über einen großen Frequenz- und Amplitudenbereich äußert. Dadurch sind turbulente Strömungen in ihrem Kern immer instationär und dreidimensional. Ursache für dieses Verhalten der Strömung ist der nichtlineare Charakter der beschreibenden Gleichungen, welcher im Konvektionsterm zum Ausdruck kommt (vgl. Abschnitt 2.1 S. 10). Diese Nichtlinearität sorgt bei einer bestimmten Größe an Störungen dafür, dass die Strömung von laminar in turbulent umschlägt. Dieser Umschlag, der mit dem Wort **Transition** bezeichnet wird und von vielen Einflussfaktoren abhängt, stellt im Grunde ein Stabilitätsproblem dar, welches jedoch im Allgemeinen schwer vorherzusagen und bei weitem noch nicht vollständig erforscht ist.

Wichtigster Indikator für die Fähigkeit zur Dämpfung von Störungen und damit für die Stabilität einer Strömung ist die **Reynoldszahl**

$$Re = \frac{ul}{\nu}, \quad (2.16)$$

welche das Verhältnis von Trägheitskräften zu Reibungskräften angibt. Bei kleinen Werten dieser dimensionslosen Zahl, also bei großen Werten der Viskosität, ist die Dämpfungswirkung der Reibungskräfte groß. Mit zunehmenden Trägheitskräften nimmt diese Dämpfungswirkung immer mehr ab, so dass das Umschlagen zur turbulenten Strömung immer wahrscheinlicher wird. Liegt eine turbulente Strömung vor, dann ist die Re-Zahl somit auch ein Maß für die Stärke der Turbulenz in einer Strömung, wobei mit „Stärke“ größere turbulente Energie gemeint ist. Nach der Theorie der **Turbulenzkaskade** (Richardson, 1922) zerfallen die großen Wirbel über den Mechanismus des „vortex stretching“ in immer kleinere Wirbel, wodurch die Energie kaskadenartig auf diese Wirbel übergeht und schließlich in Wärme dissipiert wird. Um die Turbulenz aufrecht zu erhalten, müssen wieder große Wirbel produziert werden. Dies geschieht durch Entzug von Energie aus der mittleren Strömungsbewegung. Der Größenunterschied zwischen den großen und kleinen Wirbeln nimmt mit steigender Reynoldszahl überproportional zu.

Da die großen Wirbel aus der mittleren Strömungsbewegung ihre Energie beziehen, sind sie mit den makroskopischen Abmessungen verknüpft, können also je nach Geometrie bestimmte Orientierungen haben. Diese Information geht mit fortschreitender Energiekaskade verloren, so dass die kleinsten Strukturen keine bevorzugten Richtungen mehr aufweisen. Dieses als **Lokalisotropie** bezeichnete Phänomen wurde als erstes von Kolmogorov (1941) postuliert und stellt eine sehr nützliche Eigenschaft für die mathematische Beschreibung von Turbulenz dar.

Mit der oben angesprochenen Produktion von großen Wirbeln und der Dissipation der Energie bei den kleinen Wirbeln (viskose Dissipation) sind schon zwei Mechanismen der Turbulenz angesprochen worden. Neben diesen beiden sind noch die Umverteilung von Energie oder Fluktuationen durch Druck sowie deren Transport zu

nennen. Der Transport kann dabei sowohl im physikalischen Raum, ausgedrückt mittels Konvektion durch die mittlere Strömung oder Diffusion durch Geschwindigkeits- und Druckfluktuationen, als auch im Spektralraum, ausgedrückt durch die Energiekaskade, erfolgen.

Im Zusammenhang mit den Mechanismen ist auch der Begriff des lokalen Gleichgewichts zu nennen. Damit wird ausgedrückt, dass in bestimmten Strömungsregionen nicht immer alle oben genannten Mechanismen gleichermaßen wirken, sondern ein Gleichgewicht zwischen z.B. zwei Mechanismen besteht, während die anderen vernachlässigbar sind. Solche Annahmen werden im Rahmen der Turbulenzmodellierung häufiger verwendet.

Ob man Turbulenz als hilfreich oder störend betrachtet, hängt dabei von der jeweiligen Anwendung ab. Als negative Einflüsse seien die Erhöhung des Widerstandes an Wänden durch Erhöhung der Wandschubspannung oder die Beeinflussung akustischer Wellen durch eine akustische Breitbandstrahlung genannt. Dem gegenüber stehen allerdings auch viele erwünschte Einflüsse wie z.B. die Verkleinerung von Ablösegebieten, die Reduktion des Formwiderstandes eines Hindernisses oder die Erhöhung des Wärmeüberganges an Wänden.

2.2.1 Statistische Beschreibung

Da es sich, wie bereits in der Einleitung erwähnt, zumindest in der Praxis um zufällige Fluidbewegungen handelt, ist es sinnvoll, eine statistische Beschreibungsweise zu benutzen. Diese geht davon aus, dass man eine Größe ϕ in einen zeitlichen Mittelwert $\bar{\phi}$ und eine Schwankung ϕ' zerlegen kann

$$\bar{\phi}(x_i, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi(x_i, t) \, dt \quad (2.17)$$

$$\phi = \bar{\phi} + \phi', \quad (2.18)$$

wobei der Mittelwert der Schwankung Null ist. Im einzelnen hat die Mittelung die folgenden Eigenschaften:

$$\overline{\bar{g}} = \bar{g} \quad \overline{g + f} = \bar{g} + \bar{f} \quad \overline{\bar{g}f} = \bar{g}\bar{f} \quad \overline{\frac{\partial g}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial s} \quad \overline{\int f ds} = \int \bar{f} ds \quad \bar{g}' = 0$$

Nach Einsetzen dieser Zerlegung in die Gleichungen (2.11)-(2.13) und erneuter zeitlicher Mittelung ergeben sich die **Reynolds'schen Gleichungen**

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\rho \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \right] \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial(\rho c_p \bar{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_p \bar{u}_i \bar{T})}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho c_p \overline{u'_i T'})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) \quad (2.21)$$

Dabei tauchen in (2.20) und (2.21) aufgrund der nichtlinearen Konvektion zusätzliche Terme auf, die sogenannten turbulenten Scheinspannungen oder Reynoldsspannungen

$$\overline{\rho u'_i u'_j} \quad (2.22)$$

und der turbulente Wärmestromvektor oder Reynoldsflüsse

$$\rho c_p \overline{u'_i T'} . \quad (2.23)$$

Versuche zur Berechnung dieser Terme über zusätzliche Bilanzgleichungen führen immer wieder auf neue zusätzliche Terme, so dass ein sogenanntes **Schließungsproblem** vorliegt, welches nur durch die Einführung eines Modells für diese Terme gelöst werden kann. Die Erstellung geeigneter Modelle wird von der Turbulenzmodellierung geleistet, auf welche im Abschnitt 2.3 eingegangen wird.

Wie bereits erwähnt, wird die Stärke oder Intensität der Turbulenz anhand der turbulenten Energie charakterisiert. Da die turbulenten Spannungen ohne die Dichte die Einheit einer spezifischen Energie haben, bietet es sich an, diese als Maß für Turbulenz zu verwenden. Da es sich bei (2.22) jedoch um 9 Terme handelt, ist es praktisch, eine Art Mittelwert davon zu betrachten, um nur einen Wert zu erhalten. Dafür ausgewählt wurde ein aus den 3 Normalspannungen gemittelter Wert, der als turbulente kinetische Energie bezeichnet wird:

$$k = \frac{\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}}{2} \quad (2.24)$$

Subtrahiert man die zeitgemittelte Navier-Stokes-Gleichung (2.20) von der momentanen (2.12), so erhält man eine Transportgleichung für die fluktuierende Geschwindigkeit Du'_i/Dt . Skalare Multiplikation mit der fluktuierenden Geschwindigkeit selbst und erneute Mittelung führen dann auf eine exakte Gleichung für k anhand derer die erwähnten turbulenten Mechanismen nochmals deutlich werden:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \rho \overline{k' u'_j} - \overline{p' u'_i \delta_{ij}} \right]}_{\text{Diffusiver Transport durch Viskosität, fluktuierende Geschwindigkeit und Druck}} + \underbrace{-\rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{Produktion}} - \underbrace{\rho \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}}_{\text{Dissipation}} \quad (2.25)$$

Eng mit der turbulenten kinetischen Energie k ist die Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie ε verbunden, welche auch oft vereinfacht als Dissipation bezeichnet wird. Definiert ist sie analog zur Dissipationsfunktion Φ der mittleren Strömung allerdings in Bezug auf Fluktuationen als

$$\varepsilon = 2\nu \overline{S'_{ij} S'_{ij}} \quad \text{mit} \quad S'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.26)$$

und beschreibt die Umwandlung der kinetischen in innere Energie. Sie stimmt nicht exakt mit dem letzten Term auf der rechten Seite von (2.25) überein, da der Unterschied jedoch klein ist, wird er meist vernachlässigt. Auch für ε lässt sich durch

diverse Umformungen eine exakte Gleichung herleiten, (2.26) lässt jedoch erahnen, dass diese relativ komplex ist, so dass an dieser Stelle nicht darauf eingegangen wird. Um auch anisotrope turbulente Situationen beschreiben zu können, werden neben k auch häufig sogenannte „rms“-Werte (root-mean-square) verwendet

$$u_i^{rms} = \sqrt{u_i'^2}, \quad (2.27)$$

welche statistisch gesehen der Standardabweichung der Geschwindigkeiten u_i entsprechen.

Ein weiterer für die Turbulenz nützlicher Begriff aus der Statistik ist die **Korrelationsfunktion** bzw. der Korrelationskoeffizient (keine Summation über i und j)

$$\rho_{ij}^{(k)}(\vec{x}, \Delta x_k, t, \Delta t) = \frac{\overline{u_i'(\vec{x}, t) u_j'(\vec{x} + \Delta x_k, t + \Delta t)}}{\sqrt{\overline{u_i'^2(\vec{x}, t)}} \sqrt{\overline{u_j'^2(\vec{x} + \Delta x_k, t + \Delta t)}}} = \frac{R_{ij}^{(k)}}{\sqrt{\overline{u_i'^2}} \sqrt{\overline{u_j'^2}}}, \quad (2.28)$$

der so entdimensioniert wird, dass er betragsmäßig immer kleiner oder gleich 1 ist. Die Korrelation ist ein Maß dafür, wie weit bzw. lange sich die Fluidteilchen in Raum und Zeit gegenseitig beeinflussen und ist deshalb zur Berechnung von Zeit- und Längenskalen in der Turbulenz geeignet. Der Wert der Korrelationsfunktion bei einer Verschiebung von Null entspricht gerade wieder der turbulenten Scheinspannung (ohne die Dichte ρ).

2.2.2 Zeit- und Längenskalen in der Turbulenz

Wie in der Einleitung zur Turbulenz bereits erwähnt, spielen die unterschiedlichen Zeit- und Längenskalen eine wichtige Rolle bei der Beschreibung der verschiedenen turbulenten Mechanismen im Rahmen der Energiekaskade. Damit sind sie natürlich für die Turbulenzmodellierung und somit auch für die numerischen Strömungssimulation mit Hilfe statistischer Verfahren (RANS) von entscheidender Bedeutung. Für DNS- oder LES-Rechnungen, bei denen keine bzw. nur einfache Modelle zum Einsatz kommen, ist die ungefähre Kenntnis über sie ebenfalls unverzichtbar, da sie die räumliche und zeitliche Auflösung festlegen, die zur Erfassung der Strömungsvorgänge nötig sind. Die unterschiedlichen Maße können dazu auf der einen Seite zum Teil berechnet werden, wobei der Korrelationskoeffizient (2.28) zum Einsatz kommt. Der Vollständigkeit halber sollte an dieser Stelle noch erwähnt werden, dass die Berechnung nur für statistisch homogene Turbulenz gilt, im Falle derer die statistischen Größen invariant gegenüber Translation sind, der Korrelationskoeffizient also unabhängig von \vec{x} ist. Auf der anderen Seite kann eine Abschätzung der Maße erfolgen, wobei auf Ähnlichkeitsgesetze und Dimensionsanalyse zurückgegriffen wird oder über Homogenität hinausgehende Vereinfachungen gemacht werden. Als charakteristische Größen dienen dabei die turbulente kinetische Energie k , ihre Dissipationsrate ε und die kinematische Viskosität ν .

Verbunden mit den großen Skalen ist die Erzeugung von Turbulenz in Scherschichten sowie der Impuls-, Wärme- und Stofftransport. Das mit diesen Skalen assoziierte **Integrale Längenmaß** gibt Auskunft über die größten Strukturen (Wirbel) der Strömung. Diese sind mit der Geometrie des Strömungsgebietes verknüpft (z.B. Kanalbreite), weshalb dieses Maß auch Makromaß genannt wird. Der Name „integral“ bezieht sich dabei direkt auf dessen Gewinnung, denn es ergibt sich aus der Fläche unter dem Korrelationskoeffizienten

$$L_{ij}^{(k)} = \int_0^\infty \rho_{ij}^{(k)}(\Delta x_k) d(\Delta x_k) . \quad (2.29)$$

Anhand von (2.29) wird ersichtlich, dass damit nicht nur ein integrales Längenmaß berechnet werden kann, sondern 27 verschiedene. In der Praxis werden meist nur zwei, nämlich das longitudinale und das transversale Längenmaß für die u_1 Geschwindigkeit

$$L_1 = L_{11}^{(1)} \quad \text{und} \quad L_2 = L_{11}^{(2)} \quad (2.30)$$

benutzt. Die Vielzahl an unterschiedlichen Maßen zeigt anschaulich, dass die Anisotropien in der Strömung bei den großen Skalen noch eine große Rolle spielen. Analog zum Längenmaß kann mit dem Korrelationskoeffizienten bei Verschiebung ausschließlich in der Zeit (Autokorrelation) analog (2.29) ein integrales Zeitmaß ermittelt werden, welches mit der mittleren Lebensdauer der großen Wirbel assoziiert werden kann.

Nach Kolmogorov's Vorstellung sind jedoch die größten Wirbel nicht diejenigen, welche die meiste Energie tragen, sondern im Gegenteil relativ schwach. Die energiereichsten Wirbel sind etwas kleiner. Ihre Größe kann mit Hilfe von k und ε abgeschätzt werden. Ebenfalls abgeschätzt werden kann deren charakteristisches Zeit- und Geschwindigkeitsmaß

$$l = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad \tau = \frac{k}{\varepsilon} \quad v_l = k^{1/2} . \quad (2.31)$$

Assoziiert mit den kleinsten Skalen ist die Dissipation ε . Die dazugehörigen **Kolmogorov-Maße**, die somit die eigentlichen Mikromaße sind, können nicht direkt aus (2.28) bestimmt, sondern zunächst nur abgeschätzt werden:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad v_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4} . \quad (2.32)$$

Das **Taylor-Längenmaß** entspricht nach Taylor's Hypothese dem Maß für den Durchmesser der kleinsten Wirbel, die für die Dissipation von Energie verantwortlich sind, weshalb er es Mikromaß taufte. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass dieses für das Kolmogorov Maß gilt, und dass das Taylor Maß eher ein mittleres Längenmaß ist, das zwar mit der dissipierten Energie verknüpft ist, aber keine direkte Verbindung zum Durchmesser der Wirbel hat. Das Taylor-Maß kann wiederum mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten bestimmt werden. Es ergibt sich aus der Formel

$$\frac{1}{(\lambda_{ij}^{(k)})^2} = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_{ij}}{\partial (\Delta x_k)^2} \Big|_{\Delta x_k=0} \quad (2.33)$$

bzw. auch analog für die Zeit. Im geometrischen Sinne ist dies die Oskulationsparabel des Korrelationskoeffizienten bei $\Delta x = 0$. Wie beim integralen Maß werden auch hier hauptsächlich $\lambda_1 = \lambda_{11}^{(1)}$ und $\lambda_2 = \lambda_{11}^{(2)}$ benutzt. Dass es sich um ein mittleres Maß handelt, sieht man auch daran, dass es die Geschwindigkeitsskala der energiereichen mit der Zeitskala der dissipativen Wirbel kombiniert und dass im Längenmaß alle drei charakteristischen Parameter vereint sind

$$\lambda = \sqrt{10\nu \frac{k}{\varepsilon}} \quad \tau_\lambda = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \quad v_\lambda = k^{1/2} \quad . \quad (2.34)$$

Die Abschätzung für das Längenmaß stammt dabei aus einer Berechnung der Dissipationsrate im Fall von isotroper, inkompressibler Turbulenz mit Hilfe des transversalen Längenmaßes aus (2.33)

$$\varepsilon = 15\nu \frac{u_1'^2}{\lambda_2^2} \quad \text{wobei} \quad u_1'^2 = \frac{2}{3}k \quad . \quad (2.35)$$

Neben den Informationen zur räumlichen Auflösung erhält man durch die Zeit- und Längenskalen auch wichtige Informationen für die statistische Auswertung der instationären Verfahren. Die Zeit, nach der die Geschwindigkeiten an einem Ort als statistisch unabhängig betrachtet werden können, lässt sich z.B. mit dem 2-fachen Integralen Zeitmaß abschätzen. Eine Hinzunahme eines Wertes zur Statistik, der einen kürzeren zeitlichen Abstand hat, bringt somit keine neuen Informationen, sondern nur einen zusätzlichen Mehraufwand. Weiterhin ergibt sich z.B. die Zeit, über die die statistischen Stichproben einer Größe ϕ genommen werden müssen, um den Mittelwert dieser Größe $\bar{\phi}$ mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p auf x genau zu bestimmen, aus der Formel

$$t = \frac{2\sigma^2 L_\tau}{\sigma_m^2} \quad , \quad (2.36)$$

wobei σ^2 die Varianz und L_τ das integrale Zeitmaß der Variable ϕ sind. Die Varianz des Mittelwertes σ_m^2 ergibt sich aus der gewünschten Wahrscheinlichkeit und Genauigkeit:

$$q \sigma_m = x \quad (2.37)$$

Die Fehlerschranke q für eine bestimmte Wahrscheinlichkeit (oder Vertrauensintervall) p lässt sich aus der Verteilung der Variable ϕ bestimmen. Nimmt man eine Gaußverteilung an, was für die Variablen in turbulenten Strömungen gut zutrifft, dann ergibt sich folgender Zusammenhang (Tabelle 2.1):

Vertrauensintervall p	Fehlerschranke $q\sigma$
68%	1σ
95%	1.96σ
99%	2.57σ

Tabelle 2.1: Fehlerschranken für drei Vertrauensintervalle einer Gaußverteilung [70]

2.2.3 Spektrale Betrachtungsweise

So anschaulich der physikalische Raum sein mag, ist es jedoch manchmal von Vorteil, bestimmte Vorgänge, vor allem energetischer Natur, im Frequenzbereich zu betrachten. Dazu wird zunächst mit Hilfe einer Fourier-Transformation des Korrelationskoeffizienten der Tensor des Geschwindigkeitsspektrums bestimmt. Wie im Fall der Berechnung der Zeit- und Längenskalen ist dies in dieser Form ebenfalls nur bei vorausgesetzter statistisch homogener Turbulenz möglich.

$$\phi_{ij}(\kappa_k, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa_k \Delta x_k} R_{ij}^{(k)}(\Delta x_k, t) d(\Delta x_k) \quad (2.38)$$

Dieses allgemeine Spektrum hat jedoch hauptsächlich theoretische Bedeutung, denn seine Bestimmung mit Hilfe experimentell aufgenommener Daten ist praktisch nicht möglich. Für die Praxis relevanter sind deshalb die eindimensionalen Energiespektren, welche als die doppelte Fourier-Transformierte der jeweiligen eindimensionalen Korrelationsfunktion definiert sind:

$$E_{ij}(\kappa_1, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa_1 \Delta x_1} R_{ij}^{(1)}(\Delta x_1, t) d(\Delta x_1) \quad (2.39)$$

Oft handelt es sich um stationäre oder gemittelte Daten, so dass die Zeitabhängigkeit entfällt. Die am häufigsten verwendeten eindimensionalen Spektren sind $E_{11}(\kappa_1)$, $E_{22}(\kappa_1)$ und $E_{33}(\kappa_1)$. Von besonderem Interesse ist jedoch das Spektrum der turbulenten kinetischen Energie $E(\kappa)$ mit $\kappa = |\kappa_k|$

$$E(\kappa) = \frac{1}{2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii} \delta(|\kappa_k| - \kappa) d\kappa_k, \quad (2.40)$$

in welchem sowohl die Richtungsinformation über die Geschwindigkeiten, als auch über die Fourier-Moden durch Berücksichtigung der halben Spur $\frac{1}{2}\phi_{ii}$ des Tensors des Geschwindigkeitsspektrums bzw. durch Integration über allen Wellenzahlen entfernt wird. Es repräsentiert die einzelnen Beiträge der verschiedenen Wellenlängen κ zur turbulenten kinetischen Energie k , so dass diese auch aus der gesamten Fläche unter der Kurve bestimmt werden kann:

$$k = \int_0^{\infty} E(\kappa) d\kappa \quad (2.41)$$

Ein weiteres interessantes Spektrum, nämlich das Dissipationsspektrum erhält man durch Multiplikation des Spektrums der turbulenten kinetischen Energie mit dem Quadrat der Wellenlänge κ :

$$\kappa^2 E(\kappa, t) \quad \text{wobei} \quad \varepsilon = 2\nu \int_0^{\infty} \kappa^2 E(\kappa) d\kappa \quad (2.42)$$

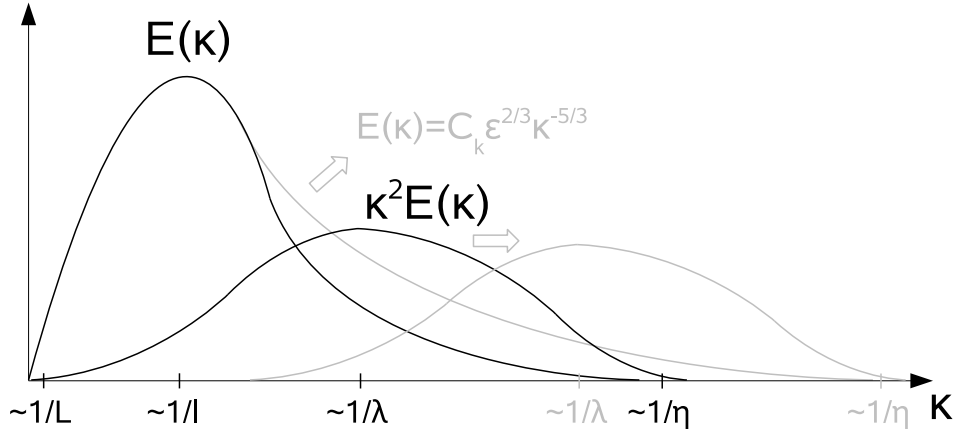


Abbildung 2.1: Beispielhafte Spektren der turbulenten kinetischen Energie und ihrer Dissipationsrate

Beide sind beispielhaft in Abb. 2.1 dargestellt. Das Spektrum von k lässt sich in 3 Bereiche aufteilen:

- Bereich der niedrigen Wellenzahlen: Hier befinden sich die größten ($\kappa \sim 1/L_1$) sowie die etwas kleineren energietragenden Wirbel ($\kappa \sim 1/l$)
- intertieller Bereich: Über eine Energiekaskade wird die Energie an die kleinen Skalen weitergegeben.
- Bereich der hohen Wellenzahlen: Hier wird die Energie dissipiert. Während $\kappa \sim 1/\eta$ bei den kleinsten Skalen zu finden ist, liegt $\kappa \sim 1/\lambda$ bei noch etwas größeren Skalen. In der Literatur wird es manchmal mit dem Maximum des Dissipationsspektrums in Verbindung gebracht, was aber physikalisch keine Begründung hat.

Damit der inertielle Bereich, in dem keine Energie dissipiert, sondern nur weitergegeben wird überhaupt existieren kann, müssen die großen und die kleinen Skalen allerdings einen gewissen Abstand im Wellenlängenraum haben. Dies ist erst ab einer bestimmten Größe der turbulenten Reynoldszahl $Re_t = k^2/(\nu\varepsilon) = k^{1/2}l/\nu = Re_l$ gewährleistet. Für isotrope Turbulenz lässt sich dies gut anhand des Verhältnisses der beiden charakteristischen Längen und Zeiten zeigen (vgl. 2.32):

$$\frac{l}{\eta} = \frac{l\varepsilon^{1/4}}{\nu^{3/4}} = \frac{l}{\nu^{3/4}} \left(\frac{k^{3/2}}{l} \right)^{1/4} = \frac{l^{3/4}(k^{1/2})^{3/4}}{\nu^{3/4}} = Re_l^{3/4} = Re_t^{3/4} \quad (2.43)$$

$$\frac{\tau}{\vartheta} = \frac{k\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon\nu^{1/2}} = \frac{k}{\varepsilon^{1/2}\nu^{1/2}} = \left(\frac{k^2}{\nu\varepsilon} \right)^{1/2} = Re_t^{1/2} \quad (2.44)$$

Die turbulente Reynoldszahl ist dabei eng mit der auf der Geometrie und der mittleren Geschwindigkeit basierenden Reynoldszahl verknüpft. Für einen Freistrahл erhält

man beispielsweise $Re_t \approx Re_D/10$. Mit steigender Reynoldszahl wird der Abstand der beiden Maße also immer größer. Da die mit den makroskopischen Abmessungen verknüpften großen Skalen erhalten bleiben, wird das Spektrum $E(\kappa)$ sozusagen gestreckt. Gleichzeitig verschiebt sich aber das mit den kleinen Skalen verknüpfte $\kappa^2 E(\kappa)$ zu höheren Wellenzahlen. Somit wandern die beiden Spektren in Abb. 2.1 immer weiter auseinander, wodurch es einen Bereich „hinter“ den energietragenden Wirbeln gibt, in dem noch keine Dissipation stattfindet, also der intertielle Bereich. Von der allgemeinen Form des Spektrums $E(\kappa) = f(\kappa, \nu, \varepsilon)$ ausgehend postulierte Kolmogorov, dass für diesen Bereich durch das Fehlen der Dissipation die Viskosität ν keine Rolle spielen kann, so dass $E(\kappa) = f(\kappa, \varepsilon)$. Aus Dimensionsgründen kommt nur eine einzige Kombination der Größen in Frage, so dass sich zwangsläufig

$$E(\kappa) = C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \quad (2.45)$$

ergibt, wobei die Kolmogorov-Konstante einen Wert von $C_K \approx 1.5$ besitzt. Die bekannte $-5/3$ Steigung dieser Zone bei logarithmischer Darstellung wurde in zahlreichen Experimenten bestätigt.

2.2.4 Strömung und Turbulenz in Wandnähe

Aufgrund der Haftbedingung an der Wand bildet sich gemäß Prandtl (1904) zwischen Wand und Außenströmung eine sogenannte **Grenzschicht** aus, innerhalb derer die Geschwindigkeit von ihrem Wert Null an der Wand (bei stehender Wand) asymptotisch auf einen Wert übergeht, den man in reibungsfreier Strömung an der Wand vorfinden würde. Dieses Gebiet kennzeichnet also den Bereich, in dem der Reibungseinfluss der Wand auf das Geschwindigkeitsfeld „spürbar“ ist. Analoges gilt auch für die Temperatur und die mit ihr verbundene Temperaturgrenzschicht. Ähnlich der Außenströmung können Grenzschichten ebenfalls über Transition vom laminaren in den turbulenten Zustand übergehen. Dabei kann die Außenströmung durchaus noch laminar bleiben (natürliche Transition). Umgekehrt kann aber auch die Außenströmung schon turbulent sein, während die Grenzschicht noch laminar ist (Bypass-Transition). Durch den bereits erwähnten erhöhten Impulsaustausch in turbulenten Strömungen wächst die Grenzschicht nach dem Transitionspunkt mit der Lauflänge wesentlich stärker an, als im laminaren Bereich. Insgesamt gesehen nimmt die Dicke der Grenzschicht mit steigender Reynoldszahl der Außenströmung gemäß

$$\delta \sim Re^{-1/2} \quad (2.46)$$

ab. Mit der Grenzschichtdicke δ ist im Allgemeinen die Dicke δ_{99} gemeint, bei welcher die Geschwindigkeit 99% der Außengeschwindigkeit beträgt. Während die Reibungskräfte in der Außenströmung gegenüber den turbulenten Kräften meist vernachlässigt werden können, spielen sie in der inneren Grenzschichtströmung eine wesentliche Rolle und zwar umso mehr, je näher man an die Wand herankommt. Dies lässt sich durch das Kleinerwerden der lokalen Reynoldszahl veranschaulichen, die den Einfluss der Trägheitskräfte gegenüber den Reibungskräften beschreibt, welcher durch

die immer kleinere Geschwindigkeit ebenfalls immer kleiner wird. Ganz nah an der Wand gibt es deshalb immer eine sogenannte viskose Unterschicht, welche rein durch die Viskosität dominiert wird. In turbulenten Grenzschichten schließt sich an diesen Bereich ein Übergangsgebiet an, welches dann in einen logarithmischen Bereich übergeht, in dem die Viskosität nur noch eine untergeordnete Rolle spielt. Handelt es sich um eine turbulente Grenzschicht bei einem nicht vorhandenen oder schwachen Druckgradienten in Strömungsrichtung, so herrscht im logarithmischen Bereich ein lokales Energiegleichgewicht zwischen Produktion und Dissipation von Turbulenz vor. Diese Situation wird häufig vereinfachend als Gleichgewichtsströmung bezeichnet und impliziert neben der Existenz des universellen logarithmischen Wandgesetzes für die gemittelte Geschwindigkeit auch, dass die turbulente Schubspannung in diesem Bereich als nahezu konstant angenommen werden kann. Beide Tatsachen sind Grundlage für die Anwendung der logarithmischen Wandfunktionen im Rahmen der numerischen Strömungssimulation.

Die Beschreibung der Vorgänge in Wandnähe erfolgt im Allgemeinen mit Größen, die aus dimensionsanalytischen Betrachtungen gewonnen wurden. Der Vorteil davon ist eine universelle Anwendbarkeit der Gesetze auf unterschiedlichste Konfigurationen mittels Skalierung. Zunächst lassen sich aus den abhängigen Variablen zwei neue wandtypische Skalen erzeugen, die Schubspannungsgeschwindigkeit und die viskose Länge:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad \text{mit} \quad \tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\text{Wand}} \quad \text{und} \quad l_\tau = \frac{\nu}{u_\tau} \quad (2.47)$$

Mit diesen können dimensionslose Größen für den Wandabstand y und die gemittelte Geschwindigkeit \bar{u}

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} \quad \text{und} \quad u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad (2.48)$$

erzeugt werden. Mit dem so eingeführten dimensionslosen Wandabstand y^+ kann man nun auch eine quantitative Unterteilung der verschiedenen Grenzschichtbereiche vornehmen. Innerhalb dieser Bereiche nimmt das Geschwindigkeitsprofil bestimmte charakteristische Verläufe an, welche ebenfalls mit Hilfe der Dimensionsanalyse zumindest für den ersten und den dritten Bereich gewonnen werden können (Prandtl, 1925).

Viskose Unterschicht (linearer Bereich):	$0 < y^+ < 5$	\implies	$u^+ = y^+$
Übergangsbereich:	$5 < y^+ < 30$		
Logarithmischer Bereich:	$30 < y^+$	\implies	$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$

Die Konstanten κ und B nehmen dabei Werte von $\kappa \approx 0.41$ und $B \approx 5.2$ an, womit im logarithmischen Bereich bis zu $y^+ \approx 1000$ eine gute Übereinstimmung gewährleistet ist. Oft wird dieser Bereich auch in der Form $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln E y^+$ dargestellt, wobei $E = e^{\kappa B} \approx 8.432$ wird. Für den Übergangsbereich werden Interpolationsformeln zwischen den anderen beiden Bereichen verwendet. Abbildung 2.2 zeigt beispielhaft den Verlauf der normierten gemittelten Geschwindigkeit einer Grenzschichtströmung mit $Re_\theta = 7500$. Die drei angesprochenen Bereiche lassen sich gut erkennen. An den

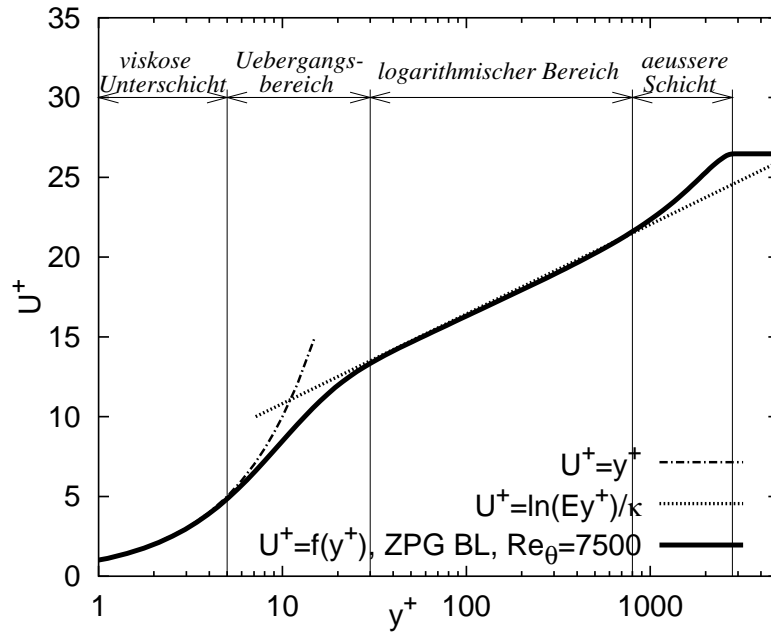


Abbildung 2.2: Verlauf der normierten gemittelten Geschwindigkeit einer Grenzschichtströmung mit $Re_\theta = 7500$ aus [32]

logarithmischen Bereich schließt sich die äußere Schicht an, innerhalb welcher keine allgemeingültige Beziehung angegeben werden kann. Während die Grenzen zwischen den verschiedenen Bereichen bei $y^+ = 5$ und $y^+ = 30$ nahezu fest sind, hängt die Grenze zwischen dem logarithmischen Bereich und der äußeren Schicht stark von der betrachteten Reynoldszahl ab.

Wie bereits erwähnt, lässt sich diese Betrachtung auch für die Temperatur durchführen. Da die Temperatur an der Wand nicht gleich Null ist, wird für die dimensionslose Temperatur Θ^+ die relative Temperatur $T - T_w$ verwendet:

$$\Theta^+ = \frac{T - T_w}{T_\tau} \quad \text{mit} \quad T_\tau = -\frac{q_w}{\rho c_p u_\tau}, \quad q_w = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{\text{Wand}} \quad (2.49)$$

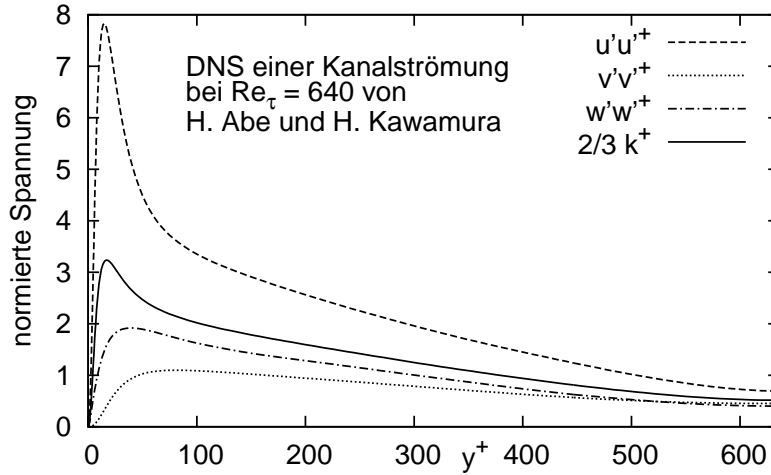
Aufgrund der zusätzlichen abhängigen Variablen, spezifische Wärmekapazität c_p und Wärmeleitfähigkeit λ , ergibt sich weiterhin eine zusätzliche dimensionslose Variable, die sogenannte Prandtl-Zahl

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad \text{mit} \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad a = \frac{\lambda}{\rho c_p}, \quad (2.50)$$

welche das Verhältnis aus kinematischer Viskosität ν und Temperaturleitfähigkeit a angibt und ein Maß für den Unterschied der viskosen zur thermischen Diffusion darstellt. Aus diesem Grund haben die viskose und die thermische Grenzschicht bei $Pr \approx 1$ (z.B. Luft) etwa die gleiche Dicke, bei $Pr > 1$ (Wasser) überwiegt die viskose Grenzschicht und umgekehrt. Die entsprechenden universellen Verläufe für die thermische Unterschicht und das logarithmische Gebiet lauten

$$\Theta^+ = Pr y^+ \quad \text{und} \quad \Theta^+ = \frac{1}{\kappa_\theta} \ln y^+ + C_\theta \quad (2.51)$$

wobei $\kappa_\theta = 0.47$, $C_\theta = 13.7\text{Pr}^{2/3} - 7.5$ oder $C_\theta = (3.85\text{Pr}^{1/3} - 1.3)^2 + \frac{1}{\kappa_\theta} \ln \text{Pr}$ sind. Die Grenzschicht an der Wand ist weiterhin dafür verantwortlich, dass in Wandnähe eine Reihe zusätzlicher Effekte auftreten, die möglichst ebenfalls bei der numerischen Simulation und bei der Modellierung berücksichtigt werden sollten. Als erstes sind die mit der Haftbedingung verbundenen **starken Gradienten** der gemittelten Größen (Geschwindigkeit, Temperatur, ...) zur Wand hin zu nennen. Diese sind nach (2.25 S. 15) immer mit einer hohen Produktion an Turbulenz verbunden. Folglich



Abbildungung 2.3: Normierte Spannungen und der isotrope Wert ($2/3 k$) bei Annäherung an eine Wand für eine Kanalströmung

sind auch die turbulenten Scheinspannungen in Wandnähe sehr hoch, was in Abb. 2.3 mit dem Verlauf der RMS-Werte in einer Kanalströmung mit der Komponente u in Strömungs- und v in Wandnormalenrichtung angedeutet wird. Dabei gilt auch für die Fluktuationen die Haftbedingung, so dass sie bis an der Wand auf Null abfallen müssen (**Verblockungseffekt**). Dieser Effekt wirkt über das Druckfeld bis zu der Länge eines integralen Maßes von der Wand weg. Als erste der drei Spannungen und am stärksten wird die Komponente senkrecht zur Wand, also $\overline{v'v'}$, gedämpft und die Energie in die beiden wandparallelen Spannungen $\overline{u'u'}$ und $\overline{w'w'}$ umverteilt, so dass stark **anisotrope**, genauer gesagt zwei-komponentige Turbulenz entsteht. Für kleine Werte von y verändert sich $\overline{v'v'} \sim y^4$, die anderen beiden Normalspannungen $\sim y^2$. Zur Veranschaulichung kann man sich vorstellen, dass die Wirbel zur Wand hin immer mehr abgeflacht werden und schließlich „Pfannkuchen“-ähnliche Strukturen darstellen. Desweiteren ist noch der **viskose Effekt** zu nennen, der durch die Herabsetzung der turbulenten Reynoldszahl Re_t begründet ist.

2.2.5 Numerische Simulation der Turbulenz

Unter der Voraussetzung, dass das zu untersuchende Fluid als Kontinuum betrachtet werden kann und dem linearen Newton'schen Materialgesetz folgt, beschreiben die Navier-Stokes'schen Gleichungen dessen Bewegung exakt. Dabei ist es unerheblich, ob es sich um eine laminare oder eine turbulente Strömung handelt. Aufgrund der Komplexität der Gleichungen ist es jedoch im Allgemeinen nicht möglich eine exakte, analytische Lösung anzugeben. Aus diesem Grund werden zur Lösung numerische Verfahren angewendet, die eine Näherungslösung der Gleichungen ermöglichen. Je genauer diese Lösung sein soll, desto aufwändiger ist die Berechnung. Im Prinzip besteht ein kontinuierlicher Zusammenhang zwischen Aufwand und Genauigkeit. Es haben sich jedoch in der Anwendung drei klassische Verfahren etabliert, die diskreten Aufwands- bzw. Genauigkeitsstufen zugeordnet werden können (Abb. 2.4).

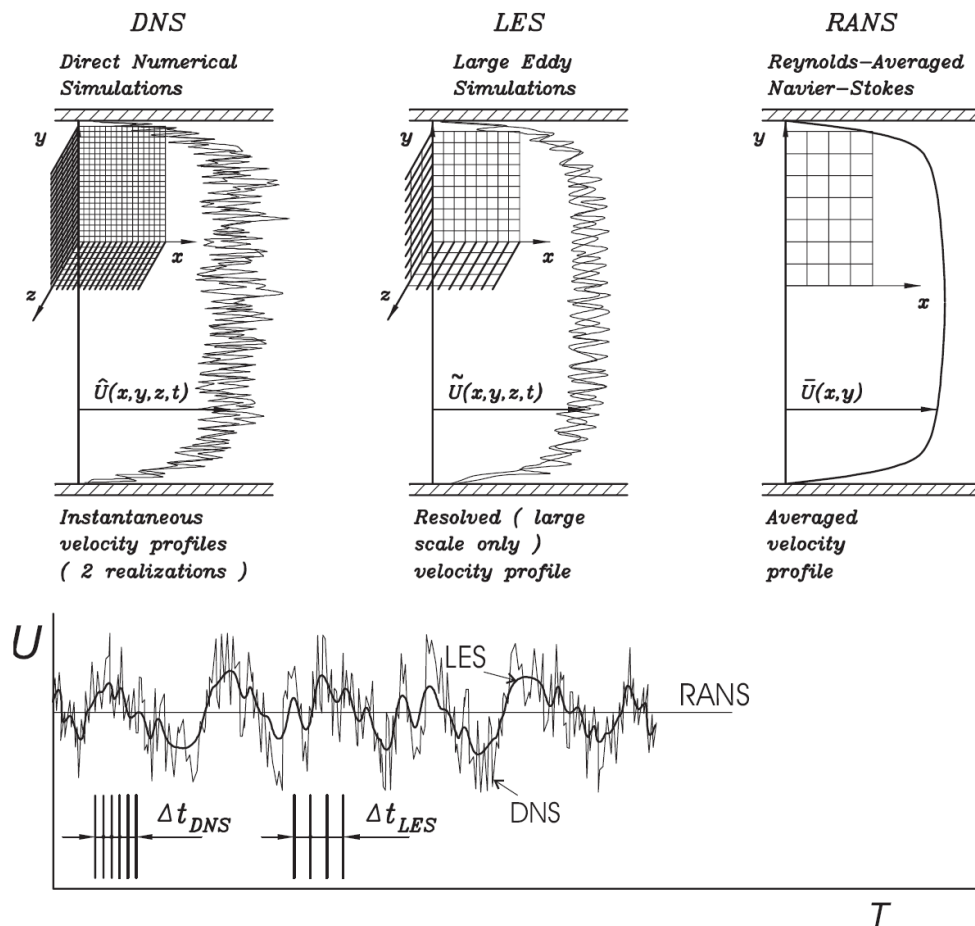


Abbildung 2.4: Übersicht über die klassischen Berechnungsmethoden aus [26]

Die erste Methode, die sogenannte **Direkte Numerische Simulation** (DNS), löst die Navier-Stokes'schen Gleichungen in ihrer originalen Form. Der Fehler, der dabei gemacht wird und zu einer Abweichung von der exakten Lösung führt, ergibt sich

aus der für das Verfahren erforderlichen Zerlegung des Gebiets in viele Teilgebiete (Diskretisierung) und den Approximationen bei der Anwendung der numerischen Verfahren (vgl. Kapitel 3). Als weitere Ungenauigkeit kommt die Vorgabe der Randbedingungen ins Spiel. Das Hauptproblem dieser Verfahren liegt in der ausreichenden Zerlegung des Problemgebietes, denn damit die diskretisierten Gleichungen eine sinnvolle Lösung liefern können, müssen alle in Abschnitt 2.2.2 (S. 16) aufgelisteten Skalen berücksichtigt, d.h. aufgelöst werden. Gleichung (2.43) gilt für eine Raumrichtung und zusammen mit (2.44) ergibt sich damit für instationäre, dreidimensionale Berechnungen eine stark überproportionale ($\sim Re_t^{11/4}$) Relation zwischen der Reynoldszahl und dem Größenverhältnis der großen und kleinsten Skalen. Aufgrund der hohen Genauigkeit dieses Verfahrens werden weiterhin hohe Ansprüche an die verwendeten numerischen Methoden gestellt, so dass meist nur einfache Geometrien berücksichtigt werden können. Aktuell werden beispielsweise Berechnungen von Kanalströmungen mit einer Gitterpunktanzahl von ≈ 50 Milliarden durchgeführt. Dafür erhält man als Ergebnis alle berechneten Strömungsgrößen zu (nahezu) jedem Zeitpunkt an (nahezu) jedem Ort im Strömungsgebiet, so als hätte man das ganze Gebiet vermessen.

Wesentlich weniger restriktiv bezüglich der Auflösung ist die sogenannte **Grobstruktursimulation** (LES: Large-Eddy Simulation). Die Idee dieser Methode ist es, wie der Name schon impliziert, nur die großen, energietragenden Wirbel und damit die Mechanismen der Produktion und des Transports direkt aufzulösen. Die dissipative Wirkung der kleinsten Skalen, die erst am Ende der langen Energiekaskade durch das intertielle Gebiet hindurch zum Tragen kommt und damit einen unverhältnismäßig größeren Aufwand bedeutet, wird modelliert. Von Vorteil ist hier der von Kolmogorov postulierte isotrope Charakter der kleinsten Skalen, der die Modellierung der kleinsten Strukturen stark vereinfacht.

Das Ausschließen der direkten Berechnung der kleinen Skalen erfolgt in den meisten Fällen automatisch durch die Wahl des numerischen Gitters, also implizit. Da für jede Zelle im Rahmen der Rechnung ein Mittelwert berechnet wird, ergibt sich eine (implizite) räumliche Filterung über einen Bereich, der dem Volumen der Zelle entspricht. Damit das Verfahren aber gemäß seiner Konzeption funktioniert, muss sichergestellt sein, dass die Größe dieses Filters, ausgedrückt in einer Wellenlänge, für jeden Gitterpunkt im intertiellen Bereich des Spektrums liegt, was bei einer unbekannten und komplexen Strömung nicht immer gewährleistet werden kann. Gerade dies macht die Benutzung der LES gefährlich, denn aufgrund der durch das Modell eingebrachten künstlichen Dissipation erhält man im Gegensatz zur DNS immer eine Lösung, auch wenn grundlegende Annahmen verletzt sind.

Bezüglich der Genauigkeit der numerischen Verfahren ist die LES nicht ganz so anspruchsvoll wie die DNS. Um Verfälschung der Ergebnisse durch numerische Diffusion zu vermeiden, sollten jedoch mindestens Verfahren 2. Ordnung sowohl im Raum als auch in der Zeit angewendet werden, was bei komplexen Geometrien häufig noch Probleme bereitet. Trotzdem wird diese Methode auch im industriellen Umfeld schon genutzt.

Einen weiteren wesentlichen Schritt in der Aufwandsreduzierung bedeuten die sogenannten **Reynolds-Averaged Navier-Stokes** (RANS)-Verfahren. Diese basieren

im Kern auf den zeitgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen und berechnen auf dieser Grundlage nur Mittelwerte der untersuchten Größen, was aber in vielen Fällen eine ausreichende Information ist. Da keine Skalen aufgelöst werden, muss die gesamte Turbulenz modelliert werden. Aufgrund der Abhängigkeit der großen Skalen von der Geometrie und der meist nicht vorhandenen Isotropie, stellt das hohe Anforderungen an die Modelle. Für genauere Modelle werden zusätzlich zu den Navier-Stokes-Gleichungen noch eine oder mehrere Modellgleichungen gelöst, mit Hilfe derer die Skalen und damit der Einfluss der turbulenten Strukturen auf die Strömung berechnet werden können.

Die Mittelung erfolgt im Gegensatz zur LES nicht durch das Gitter, sondern nur durch die Mittelung der Gleichungen (vgl. Abschnitt 2.2.1 S. 14). Die dabei entstehenden zusätzlichen Terme (2.22) bzw. (2.23), die die komplette Turbulenz enthalten, nehmen dabei so große Werte gegenüber den laminaren Termen an, dass sich eine zwar laminar aussehende aber gemittelte turbulente Strömung einstellt.

Eine Abhängigkeit von der Auflösung des Gitters besteht allerdings weiterhin in der Forderung nach möglichst genauer Approximation bzw. Interpolation bei den Diskretisierungsverfahren. Der Aufwand liegt aber gegenüber der LES trotz der eventuell zusätzlichen Gleichungen für das Modell um ca. eine Größenordnung niedriger. Noch extremer wird die Aufwandsreduzierung durch die Möglichkeit, die Zahl der Raumrichtungen zu reduzieren, wenn es sich um im zeitlichen Mittel zwei- oder gar eindimensionale Probleme handelt, was in der Praxis relativ häufig vorkommt. Durch das hohe Maß an Modellierung, bei welcher viele Vereinfachungen gemacht werden und halbempirische Funktionen zur Anwendung kommen, ist die Genauigkeit dieser Verfahren theoretisch geringer, als bei den beiden anderen. Durch die vielen Wechselwirkungen in komplexen Strömungen und die Fehleranfälligkeiten (Auflösung, Numerik, Mittelung) bei der Benutzung der LES in diesen Fällen kann es jedoch durchaus vorkommen, dass die RANS-Lösung ein besseres Ergebnis liefert, als die nachträglich gemittelten Werte der LES.

Die hybriden LES/RANS-Verfahren ordnen sich bezüglich des Aufwands zwischen LES und RANS ein. Wird das RANS-Modell wie im vorliegenden Fall als Wandmodell verstanden, so liegt der Aufwand jedoch näher bei LES, als bei RANS. Da LES und RANS die Grundlage für das vorgestellte hybride Verfahren darstellen, wird im Folgenden näher darauf eingegangen.

2.3 Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS)

Die Grundlage dieser Methode wird durch die **statistische Zerlegung** einer Größe ϕ in ihren zeitlichen Mittelwert und ihre Schwankung gebildet (vgl. 2.2.1, S.14). Deshalb werden RANS-Verfahren auch als statistische Methoden bezeichnet. Die Berechnung der unbekannten Terme, die durch diese Aufteilung entstehen ((2.22) bzw. (2.23)) und die gesamte Turbulenz berücksichtigen, muss von der Turbulenzmodellierung geleistet werden. Im folgenden wird auf einige wichtige Modelle eingegangen, die auch im Rahmen der Arbeit verwendet werden.

2.3.1 Modelle basierend auf der turbulenten Viskosität (EVM)

Der verbreiteste Ansatz zur Bestimmung der unbekannten Terme in den Reynoldsschen Gleichungen ist die Verwendung einer turbulenten Viskosität μ_t , welche keine Stoffgröße darstellt, sondern von der Strömung selbst abhängt. Im überwiegenden Teil der Fälle wird sie im Zusammenhang mit der von Boussinesq im Jahr 1877 mit Worten beschriebenen und später in eine generalisierte Form gebrachten Formulierung verwendet

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = -\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.52)$$

die der Newton'sche Formulierung des Spannungstensors angelehnt ist. Sie impliziert zum einen, dass die Reynoldsspannungen zu jedem Zeitpunkt über den mittleren Geschwindigkeitsgradienten bestimmt werden können, zum anderen, dass die Beziehung der beiden linear ist. Beide Annahmen sind im Allgemeinen nicht zutreffend. Die beste Übereinstimmung wurde in einfachen Scherströmungen gefunden, in denen sich die mittleren Gradienten und die Turbulenzcharakteristika langsam verändern. Verknüpft mit der Boussinesq'schen Formulierung und auch ähnlich problematisch bezüglich der Allgemeingültigkeit ist der sogenannte Gradienten-Fluss-Ansatz

$$\rho c_p \overline{u'_i T'} = -\rho c_p a_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} = -\lambda_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (2.53)$$

gemäß welchem der skalare Fluss (hier der Wärmefluss) wie der mittlere Temperaturgradient ausgerichtet ist. Trotz ihrer erwähnten Probleme finden beide Ansätze weite Verbreitung. Die Begründung liegt wahrscheinlich in der Tatsache, dass die Anzahl der Unbekannten in diesen Fällen von 9 (6+3) auf 2, nämlich die **turbulente Viskosität** μ_t und die turbulente Temperaturleitfähigkeit a_t bzw. die turbulente Wärmeleitfähigkeit λ_t , reduziert wird. Noch übersichtlicher wird es, wenn man bedenkt, dass die turbulente Wärmeleitfähigkeit mit Hilfe der turbulenten Prandtl-Zahl $Pr_t = \nu_t/a_t$ aus der turbulenten Viskosität bestimmt werden kann, wodurch die Anzahl der Unbekannten auf eine reduziert werden kann.

$$\lambda_t = \frac{\mu_t c_p}{Pr_t} \quad (2.54)$$

Da der turbulente Wärmetransport und Impulstransport aufgrund derselben Mechanismen entstehen, ist $Pr_t \approx 1$. In der Praxis wird häufig $Pr_t = 0.9$ verwendet. Es ist aber auch möglich, eine schwache Abhängigkeit von der molekularen Prandtl-Zahl zu berücksichtigen ([22], [41]):

$$Pr_t = 1.01 - 0.09 Pr^{0.36} \quad Pr \geq 1 \quad (2.55)$$

$$Pr_t = \frac{1}{0.91 + 0.13 Pr^{0.545}} \quad Pr < 1 \quad (2.56)$$

Ein weiterer Grund für die häufige Benutzung dieses Ansatzes ist die Einfachheit des entstehenden Gleichungssystems. Setzt man (2.52) in (2.20) und (2.21) ein, dann

erhält man für die Impuls- und Energiegleichung

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\underbrace{(\mu + \mu_t)}_{\mu_{eff}} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \right] \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial(\rho c_p \bar{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_p \bar{u}_i \bar{T})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\underbrace{(\lambda + \lambda_t)}_{\lambda_{eff}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) \quad (2.58)$$

welche sich von den Ausgangsgleichungen nur durch die Verwendung einer effektiven (Summe aus molekularer und turbulenter) anstatt der molekularen Viskosität bzw. Wärmeleitfähigkeit unterscheidet. Dies macht die Programmierung einfach, sorgt aber auch gleichzeitig für eine hohe Stabilität und Robustheit dieser Verfahren.

Das Hauptanliegen ist demzufolge die Bestimmung der turbulenten Viskosität μ_t . An dieser Stelle kommen erneut die unterschiedlichen **Skalen der Turbulenz** ins Spiel. Analog der kinetischen Gastheorie, nach welcher die molekulare Viskosität proportional zur freien Weglänge der Moleküle und deren mittlerer Geschwindigkeit ist, geht man davon aus, dass somit auch die turbulente Viskosität proportional einer charakteristischen Länge und einer charakteristischen Geschwindigkeit ist.

$$\nu_t \sim l^* u^* \quad \text{bzw.} \quad \nu_t = C l^* u^* \quad (2.59)$$

Die einzelnen Turbulenzmodelle unterscheiden sich nun hauptsächlich in der unterschiedlichen Bestimmung der beiden charakteristischen Skalen.

Wie Eingangs erwähnt, wird mit der Boussinesq'schen Formulierung ein linearer Zusammenhang zwischen Verzerrung und Spannung impliziert, was im Allgemeinen nicht zutreffend ist. Um dieses Problem zu überwinden oder zumindest zu verringern, kann man diese Formulierung so erweitern, dass nichtlineare Modelle entstehen. Diese zeigen zwar Verbesserungen, meist aber nur in bestimmten Anwendungen. Da der Aufwand dabei jedoch merklich höher liegt, als bei den linearen Modellen, haben sie sich bis jetzt nicht durchgesetzt. Aus diesem Grund wird hier nur auf lineare Modelle eingegangen.

2.3.1.1 Algebraische Turbulenzmodelle

Das älteste Turbulenzmodell dürfte das sogenannte Mischungsweg-Modell von Prandtl sein (1925), welches ein algebraisches Modell ist. In diesem Zusammenhang bedeutet das, dass die oben angesprochenen Maße zur Bestimmung von ν_t ohne zusätzliche Gleichungen, also nur aufgrund algebraischer Beziehungen gewonnen werden, weshalb diese Modelle auch Nullgleichungsmodelle genannt werden. Die von Prandtl eingeführte Mischungsweglänge l_m stellt dabei die Länge dar, über die sich Turbulenzballen von der Umgebung unbeeinflusst bewegen, bevor sie sich vermischen und dabei ihre Identität verlieren. Das mit dieser Bewegung verbundenen Geschwindigkeitsmaß ist dabei proportional $l_m \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$. Daraus ergibt sich folgender Ausdruck für

die turbulente Viskosität

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad \text{wobei} \quad \nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}, \quad (2.60)$$

mit welchem das Problem auf die Bestimmung der Mischungsweglänge verlagert ist, was allerdings zur Veranschaulichung beigetragen hat. Die Proportionalitätskonstante wird dabei mit der Mischungsweglänge zusammengezogen, welche ohnehin noch bestimmt werden muss. Für die Mischungsweglänge gibt es je nach Strömungsregion unterschiedliche Formulierungen. In Wandnähe wird ein linearer Zusammenhang mit dem Wandabstand $l_m = \kappa y$ benutzt. Der Tatsache, dass die turbulente Viskosität in der viskosen Unterschicht und der Übergangszone gedämpft wird, kann man durch Verwendung der **Van Driest'schen Dämpfungsfunktion** Rechnung tragen, mit welcher eine für die ganze Wandregion gültige Beziehung folgt:

$$l_m = \kappa y \left[1 - e^{(-y^+/26)} \right] \quad (2.61)$$

2.3.1.2 Ein- bzw. Zweigleichungsmodelle

Im Unterschied zu den algebraischen Modellen werden zur Bestimmung der charakteristischen Maße dieser Modelle zusätzliche Gleichungen gelöst. Am häufigsten wird die Gleichung für die turbulente kinetische Energie (2.25) genutzt, was zur Folge hat, dass eine erweiterte Boussinesqsche Formulierung

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = -\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} k, \quad (2.62)$$

benutzt werden muss, in der k erneut auftaucht. Dadurch wird sichergestellt, dass die Summe der Diagonalelemente gemäß dem Modell nicht gleich Null, sondern gleich $2k$ ist. Dieser zweite, sogenannte isotrope Anteil taucht jedoch in der Berechnung nicht explizit auf, sondern wird mit p zu einem modifizierten Druck p^* zusammengeführt. Mit k wird sofort das Geschwindigkeitsmaß $k^{1/2}$ geliefert. Zur Bestimmung des Längenmaßes wird noch eine zweite Gleichung für eine Größe benutzt, die entweder direkt ein Längenmaß darstellt, oder wiederum über k in ein Längenmaß transformiert werden kann, so dass eine Vielzahl an Möglichkeiten entsteht (k - ω , k - τ , k - kL). Das bekannteste Zweigleichungsmodell ist allerdings das **k- ϵ -Modell**. Das Längenmaß berechnet sich aus $k^{(3/2)}/\epsilon$, so dass sich die turbulente Viskosität zu

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.63)$$

ergibt. Die beiden zusätzlichen Transportgleichungen für k und ϵ sehen folgendermaßen aus (vgl. (2.25)):

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \epsilon \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \epsilon \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.65)$$

Der Term der produzierten turbulenten kinetischen Energie P_k wird dabei aus

$$P_k = 2\mu_t S_{ij} S_{ij} \quad (2.66)$$

berechnet. Die zahlreichen Konstanten in den Gleichungen werden zur Kalibrierung des Modells benutzt, für das Standardmodell lauten sie:

$$C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.33, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92 \quad (2.67)$$

Die oben angegebene Form stellt eine high-Reynolds-Variante des Modells dar, welche nur in Kombination mit Wandfunktionen benutzt werden kann. Will man die Gleichungen bis an die Wand heran lösen (**low-Re-Versionen**), so muss man im Wesentlichen zwei Effekte berücksichtigen, die im Rahmen der high-Re-Versionen übergangen werden:

1. viskose Effekte
2. Versperrungseffekte durch die Wand

Um diesen Rechnung zu tragen, müssen zusätzliche Dämpfungsfunktionen in die Berechnung bestimmter Terme eingefügt werden. Im Falle des **Launder-Sharma Modells** [36] tauchen diese im Ausdruck der turbulenten Viskosität und im P_ε Term der ε -Gleichung auf, wodurch das Modell die folgende Form gewinnt:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \left(\tilde{\varepsilon} + 2\nu \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_l} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_l} \right) \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial(\rho \tilde{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \tilde{\varepsilon} \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} - f_\varepsilon C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + \rho S_\varepsilon \quad (2.69)$$

$$\mu_t = f_\mu C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.70)$$

Die Dämpfungsfunktionen werden dabei durch

$$f_\mu = e^{-3.4/(1+Re_t/50)^2} \quad \text{und} \quad f_\varepsilon = 1 - 0.3e^{-Re_t^2} \quad (2.71)$$

beschrieben. Der Term S_ε enthält 2. Ableitungen der Geschwindigkeit

$$S_\varepsilon = 2\nu \nu_t \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_l} \quad (2.72)$$

was numerisch nicht einfach zu behandeln ist. Um dieses zu umgehen, wird im **Modell nach Chien** [10] der Term $2\nu \frac{\varepsilon}{y^2} e^{-0.5y^+}$ eingeführt, in dem durch den Wandabstand zum Quadrat dividiert wird. Dies bringt auf der einen Seite einen Rechenzeiterparnis, auf der anderen Seite verursacht dieser Term aber vor allem in komplexen Geometrien, in denen der Wandabstand nicht immer einfach zu bestimmen ist, Probleme. Außerdem wird dadurch die Gittersensitivität erhöht, denn bei einer

feinen Auflösung können sehr große Terme entstehen. Nicht ganz unproblematisch im Chien-Modell ist weiterhin die direkte Verwendung von y^+ in der Dämpfungsfunktion f_μ .

Beiden Modellen gemeinsam ist die Verwendung einer modifizierten Dissipation $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon_w$. Dabei stellt ε_w den Wert von ε an der Wand dar. Mit dieser Modifikation ist es möglich $\tilde{\varepsilon} = 0$ an der Wand als Randbedingung vorzugeben. Um dieser Änderung Rechnung zu tragen, muss natürlich auch der ε -Term in der k -Gleichung geändert werden, so dass dort das richtige ε zu finden ist. Im Fall des Launder-Sharma-Modells wird $\varepsilon_w = 2\nu(\partial\sqrt{k}/\partial x_l)^2$ verwendet. Beim Chien-Modell kommt ein analoger, aber doch leicht unterschiedlicher Term $2\nu k/y^2$ zum Einsatz, so dass sich das vollständige Modell folgendermaßen darstellt:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho k \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{k} + \frac{2\nu}{y^2} \right) \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial(\rho \tilde{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \tilde{\varepsilon} \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} - \rho \tilde{\varepsilon} \left(f_2 C_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} + \frac{2\nu}{y^2} e^{-0.5 y^+} \right) \quad (2.74)$$

$$\mu_t = f_\mu C_\mu \rho \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (2.75)$$

Die Dämpfungsfunktionen sind auch etwas modifiziert und lauten

$$f_\mu = 1 - e^{-0.0115 y^+} \quad \text{und} \quad f_2 = 1 - 0.22 e^{(-Re_t/6)^2} . \quad (2.76)$$

Die teilweise modifizierten Konstanten sind

$$C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.35, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.35, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.8 . \quad (2.77)$$

Da dieses Modell im Programm FASTEST eingebaut ist, wird es für die ersten Rechnungen benutzt.

2.3.1.3 Das Konzept der homogenen Dissipation

Das Konzept der homogenen Dissipation basiert auf der Tatsache, dass der inhomogene Anteil ε_i der Dissipation ε analytisch, also exakt, mit Hilfe der molekularen Diffusion der turbulenten kinetischen Energie berechnet werden kann:

$$\varepsilon = \varepsilon^h + \varepsilon^i = \varepsilon^h + \frac{1}{2} D_k^\nu = \varepsilon^h + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) \quad (2.78)$$

Nur der homogene Anteil ε^h erfordert Modellierung. Aus diesem Grund wird in der Dissipationsgleichung ε durch ε^h ersetzt. Dadurch ändert sich ebenfalls die Wandrandbedingung, denn der homogene Anteil beträgt an der Wand genau die Hälfte der gesamten Dissipation:

$$\varepsilon_w^h = \nu \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_l} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \varepsilon_w \quad (2.79)$$

Eine letzte Änderung muss im Diffusionsterm der Transportgleichung für k und ε dahingehend durchgeführt werden, dass nur die Hälfte des molekularen Viskosität verwendet wird:

$$\dots = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{2} \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{k/\varepsilon}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \dots \quad (2.80)$$

Dieses Konzept kann im Prinzip sowohl in k - ε -Modellen, als auch in Reynoldsspannungsmodelle angewendet werden.

2.3.1.4 Das k - ε - ζ -f-Modell

Das Hauptproblem der low Re-Modelle ist die Bestimmung der Dämpfungsfunktionen, die den bereits erwähnten Phänomenen in Wandnähe Rechnung tragen sollen. Um diesem zu begegnen, wurde von Durbin (1991) [16] der folgende Ansatz zur Bestimmung der turbulenten Viskosität vorgeschlagen:

$$\mu_t = C_\mu \rho \overline{v^2} \tau \quad (2.81)$$

Nach wie vor wird die turbulente Viskosität mit Hilfe eines Geschwindigkeits- und eines Zeitmaßes bestimmt. Das hier gewählte Geschwindigkeitsmaß $\overline{v^2}$ stellt die Reynoldsspannungskomponente senkrecht zur Wand dar. Diese ist sehr viel angebrachter zur Bestimmung der turbulenten Viskosität als der isotrope Wert k , da der Wandeffekt somit automatisch mitberücksichtigt wird. Allerdings ist sie im Rahmen eines Standard k - ε Modells nicht bekannt. Deshalb muss für diese Größe eine zusätzliche Gleichung gelöst werden. Um in dieser Gleichung die Wand zu „simulieren“, wurde eine **elliptische Relaxationsfunktion** f_{22} oder einfach f eingeführt. Für diese muss ebenfalls eine Gleichung gelöst werden, so dass es sich im Grunde um ein 4-Gleichungsmodell handelt.

Um die numerische Stabilität und Robustheit des Modells zu erhöhen, wurde 2004 von Hanjalić [25] vorgeschlagen, anstatt für $\overline{v^2}$ eine Gleichung für $\zeta = \overline{v^2}/k$ zu lösen. Außerdem wurde eine Veränderung in Bezug auf die Wandrandbedingung von f vorgeschlagen. Damit erhält das k - ζ -f Modell folgendes Aussehen:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k \overline{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \varepsilon \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \varepsilon \overline{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon}{\tau} \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial(\rho \zeta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \zeta \overline{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\zeta} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \right] + \rho f - \frac{\zeta}{k} P_k \quad (2.84)$$

$$L^2 \nabla^2 f - f = \frac{1}{\tau} \left(c_1 + C_2' \frac{P_k}{\rho \varepsilon} \right) \left(\zeta - \frac{2}{3} \right) \quad (2.85)$$

wobei

$$\mu_t = \rho C_\mu \zeta k \tau. \quad (2.86)$$

Das Zeitmaß τ und die Länge L werden aus

$$\tau = \max \left[\min \left(\frac{k}{\varepsilon}, \frac{a}{\sqrt{6}C_\mu |S| \zeta} \right), C_\tau \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right] \quad (2.87)$$

$$L = C_L \max \left[\min \left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \frac{k^{1/2}}{\sqrt{6}C_\mu |S| \zeta} \right), C_\eta \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right] \quad (2.88)$$

bestimmt.

$$C_\mu = 0.22, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.4(1 + 0.012\zeta), \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9$$

$$C_\tau = 6.0, \quad \sigma_\zeta = 1.2, \quad C_L = 0.36, \quad C_\eta = 85, \quad a = 0.6, \quad c_1 = 0.4, \quad C'_2 = 0.65$$

2.3.2 Die Reynoldsspannungsmodelle (RSM)

Im Gegensatz zu den bis jetzt vorgestellten Modellen basieren Reynoldsspannungsmodelle nicht auf der Boussinesq-Approximation (2.52), (2.53). Vielmehr wird für jede der unbekannten Reynoldsspannungen bzw. Reynoldsflüsse eine separate Transportgleichung gelöst. Da in diesen Transportgleichungen auch die Dissipation ε benötigt wird, hat man es hier mit 7 bzw. bei Berücksichtigung der Energiegleichung mit 10 zusätzlichen Gleichungen zu tun. Zum dadurch wesentlich höheren Rechenaufwand kommt bei diesen Modellen erschwerend hinzu, dass die Turbulenz nicht wie im Abschnitt 2.3.1 über eine effektive Viskosität berücksichtigt werden kann, welche sich aus dem molekularen und dem turbulenten Anteil zusammensetzt. Die direkte Berücksichtigung der Reynoldsspannungen ist numerisch sehr viel aufwändiger und im Allgemeinen auch instabiler. Trotzdem sind diese Methoden in bestimmten Bereichen weit verbreitet, da dort häufig nur mit diesen korrekte RANS-Ergebnisse erzielt werden können. Die Herleitung der exakten Gleichungen

$$\frac{D \overline{u'_i u'_j}}{Dt} = \dots \quad \text{bzw.} \quad \frac{D \overline{u'_i T'}}{Dt} = \dots$$

erfolgt ähnlich der Herleitung der k -Gleichung aus den Navier-Stokes'schen Gleichungen mit Hilfe der Transportgleichung für die fluktuierende Geschwindigkeit.

2.4 Large-Eddy Simulation (LES)

Während die Größen bei der RANS-Methode zeitlich gemittelt werden, zeichnet sich die Large-Eddy Simulation durch eine **räumliche Filterung** aus. Dabei wird die Größe ϕ ebenfalls in 2 Anteile zerlegt:

$$\phi = \widehat{\phi} + \phi' \quad (2.89)$$

Der erste ist der gefilterte Anteil, während der zweite den übriggebliebenen (residual), also sozusagen den Restanteil darstellt. Wird das Gitter als impliziter Filter verwendet, dann entspricht der erste dem aufgelösten Teil. Der zweite Anteil wird dann als subgrid-scale-Anteil (SGS) bezeichnet, da er quasi „durch das Gitternetz fällt“ und damit nicht aufgelöst wird, sondern modelliert werden muss. Die Eigenschaften der Filterung sind jedoch grundverschieden gegenüber denen der zeitlichen Mittelung bei den RANS-Verfahren:

$$\widehat{g'} \neq 0 \quad \text{und} \quad \widehat{\widehat{g}} \neq \widehat{g} \quad \widehat{\widehat{gf}} \neq \widehat{g}\widehat{f} \quad (\text{i.A.}) \quad (2.90)$$

Nach Anwendung der Filterung auf die Gleichungen (2.11)-(2.13) erhält man das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial(\rho \widehat{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \widehat{u}_i \widehat{u}_j)}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} \right) \right] \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial(\rho c_p \widehat{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_p \widehat{u}_i \widehat{T})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \widehat{T}}{\partial x_i} \right) \quad (2.93)$$

Da die Filterung eine lineare Operation darstellt, wirkt sie sich wie auch die zeitliche Mittelung signifikant nur auf die nichtlinearen Terme aus. Der Hauptunterschied zur ungefilterten Gleichung zeichnet sich deshalb in

$$\rho \widehat{u}_i \widehat{u}_j \neq \rho \widehat{u}_i \widehat{u}_j \quad (2.94)$$

und

$$\rho c_p \widehat{u}_i \widehat{T} \neq \rho c_p \widehat{u}_i \widehat{T} \quad (2.95)$$

aus. Wichtig dabei ist, dass der Unterschied zwischen den rechten und linken Seiten von (2.94) und (2.95) durch ein Modell abgedeckt werden muss, welches den Effekt der nicht aufgelösten Anteile ersetzt. Analog zum Reynoldsspannungs- bzw. Reynoldsfusstensor bei RANS wird ein Tensor des Restspannungsanteils

$$\tau_{ij}^R = \rho \widehat{u}_i \widehat{u}_j - \rho \widehat{u}_i \widehat{u}_j \quad (2.96)$$

und des Restflussanteils

$$q_i^R = \rho c_p \widehat{u}_i \widehat{T} - \rho c_p \widehat{u}_i \widehat{T} \quad (2.97)$$

eingeführt. Damit erhält man ein Gleichungssystem, dass dem der RANS-Methode ((2.19) - (2.21)) sehr ähnlich sieht:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial(\rho \hat{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \hat{u}_i \hat{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^R}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \right) \right] \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial(\rho c_p \hat{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_p \hat{u}_i \hat{T})}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i^R}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_i} \right) \quad (2.100)$$

Bei den meisten Modellen wird wie beim Boussinesq'schen Ansatz der unbekannte Tensor durch eine künstliche Viskosität und den Verzerrungstensor approximiert:

$$\tau_{ij}^R = -\underbrace{\mu_r \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right)}_{2\hat{S}_{ij}} + \frac{2}{3} \rho k_r \delta_{ij} = \tau_{ij}^r + \frac{1}{3} \tau_{kk}^R \delta_{ij} \quad (2.101)$$

bzw.

$$q_i^R = -\rho c_p a_t \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_i} = -\lambda_t \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_i} = -\frac{\mu_r c_p}{\text{Pr}_t} \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_i} \quad (2.102)$$

Dabei stellt τ_{ij}^r den anisotropen Teil des Restspannungstensors und $\rho k_r = 1/2 \tau_{kk}^R$ die turbulente kinetische Restenergie oder die turbulente kinetische Energie der Feinstruktur dar. Der isotrope Teil des Restspannungstensors $2/3 \rho k_r$ wird analog zur RANS-Formulierung mit dem Druck zusammengeführt. Außerdem wird der Index „r“ bei impliziter Filterung häufig durch „SGS“ ersetzt.

Eingesetzt in (2.99) und (2.100) ergibt sich eine zu RANS analoge Form mit einer effektiven Viskosität (vgl. (2.57) und (2.58)), was die Implementierung extrem erleichtert und ebenfalls von der Robustheit dieser Formulierung profitiert. Im Hinblick auf die Kopplung beider Methoden stellt dies ebenfalls eine Vereinfachung dar.

$$\frac{\partial(\rho \hat{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \hat{u}_i \hat{u}_j)}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\underbrace{(\mu + \mu_{SGS})}_{\mu_{eff}} \left(\frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \right) \right] \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial(\rho c_p \hat{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_p \hat{u}_i \hat{T})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\underbrace{(\lambda + \lambda_{SGS})}_{\lambda_{eff}} \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_i} \right) \quad (2.104)$$

Konzeptionell ist dies ein sehr interessantes Ergebnis, denn im Fall von RANS wird mit der Erhöhung von μ eine zeitliche Mittelung erreicht, im Fall von LES eine räumliche Filterung. Der in der Ausführung einzige Unterschied ist das Maß der Erhöhung, welches bei LES sehr viel niedriger ausfällt, als bei RANS. Beide Methoden erzeugen jedoch im Prinzip eine mehr oder minder starke Dämpfung von Fluktuationen im Feld.

Für die Modellierung der turbulenten Viskosität wird ebenfalls analog zu RANS eine Kombination aus einem charakteristischen Zeitmaß und einen Längenmaß gebildet. Im Unterschied zu RANS, in welchem Zusammenhang das Längenmaß unbekannt ist und berechnet werden muss, ist es bei LES durch die Gitterweite vorgegeben, denn das Modell zielt nur auf die Modellierung der Skalen unterhalb des Gitters. Da es sich immer um dreidimensionale Gitterelemente handelt, muss eine Art Mittelwert gefunden werden, der repräsentativ für die jeweilige Zelle ist. Im Allgemeinen wird für diese sogenannte **Filterweite** Δ der Ausdruck $\Delta = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}$ verwendet. Schon dadurch wird deutlich, dass das Gitter bei einer LES möglichst homogen sein sollte, da sonst dieser Mittelwert nicht mehr repräsentativ für alle Raumrichtungen ist. Auf weitere Probleme, die bei LES aus der Inhomogenität des Gitters heraus entstehen wird im Kapitel 3 eingegangen.

2.4.1 Das Smagorinsky-Modell

Das Smagorinsky-Modell ist das wohl bekannteste subgrid-scale-(SGS)-Modell. Analog zu RANS gesehen entspricht es einem einfachen **Mischungswegmodell**. Im RANS-Kontext liefern diese Modelle eher schlechte Ergebnisse. Der große Unterschied oder genauer gesagt Vorteil der LES an dieser Stelle liegt darin, dass nur die kleinen, nicht aufgelösten Skalen, welche nach der Theorie der Turbulenzkaskade nahezu isotrop und damit einfach abzubilden sind, modelliert werden müssen. Der zu (2.60) analoge Ausdruck zur Bestimmung der turbulenten Viskosität lautet

$$\mu_{SGS} = \rho \underbrace{(C_s \Delta)^2}_{l_m} \underbrace{\sqrt{2 \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij}}}_{|\hat{S}|}, \quad (2.105)$$

wobei der Mischungsweg mit der Filterweite Δ und der Smagorinsky-Konstante C_s abgeschätzt wird. Die Scherrate $|\hat{S}|$ bestimmt sich aus Multiplikation des Verzerrungstensors, welcher in diesem Zusammenhang meist mit S_{ij} bezeichnet wird. Die Konstante C_s bewegt sich in einem theoretischen Bereich von $C_s \approx 0.065 - 0.2$, wobei 0.065 ein guter Wert für Kanalströmungen ist. Standardmäßig wird $C_s = 0.1$ verwendet. Ähnlich dem Mischungswegmodell sollte auch bei diesem Modell die modellierte Viskosität in Wandnähe gedämpft werden, so dass die van Driest'sche Dämpfungsfunktion (2.61) auch hier zur Anwendung kommen kann. Eine Dämpfungsfunktion, welche das asymptotische Verhalten der turbulenten Viskosität an der Wand besser beschreibt, wurde von Piomelli [52] vorgeschlagen. Damit ergibt sich die Mischungsweglänge zu:

$$l_m = C_s \Delta \left[1 - e^{-(y^+/25)^3} \right]^{1/2} \quad (2.106)$$

Will man ganz auf die Vorgabe der Konstanten verzichten, dann kann man die Konstante auch **dynamisch** aus der Rechnung heraus bestimmen lassen. Dies wird mit einer Testfilterung auf einem gröberen Gitter erreicht, so dass sich C_s für jedem Gitterpunkt bestimmen lässt. Auch die Dämpfung an der Wand wird dadurch automatisch berücksichtigt. Diese Prozedur wurde von **Germano** [21] vorgeschlagen.

2.4.2 Das Yoshizawa-Modell

Dieses Modell (1993) basiert ebenfalls auf der Boussinesq-Approximation. Im Unterschied zum oben erwähnten Smagorinsky-Modell wird jedoch eine zusätzliche Gleichung für die **turbulente kinetische Energie der Feinstruktur** k_{SGS} gelöst (2.107).

$$\frac{\partial(\rho k_{SGS})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k_{SGS} \hat{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_{SGS}) \frac{\partial k_{SGS}}{\partial x_j} \right] + 2\mu_{SGS} \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij} - \rho C_\varepsilon \frac{k_{SGS}^{3/2}}{\Delta} \quad (2.107)$$

Die turbulente Viskosität wird über

$$\mu_{SGS} = \rho C_k \Delta k_{SGS}^{1/2} \quad (2.108)$$

bestimmt, wobei $C_k = 0.07$, $C_\varepsilon = 1.05$.

Kapitel 3

Numerische Verfahren

Das Ziel dieses Kapitels ist es, einige numerische Begriffe und Schlagwörter, die immer wieder im Text auftauchen, näher zu erklären, um dem Leser/der Leserin ein besseres bzw. schnelleres Verständnis der Ausführungen zu ermöglichen. Wie auch im vorherigen Kapitel sei für Detailfragen wiederum auf die Fachliteratur verwiesen, die als Grundlage für die Erstellung dieses Kapitels diente ([49], [56], [71]).

Die numerische Behandlung eines strömungsmechanischen Problems lässt sich in fünf wesentliche Teilschritte unterteilen:

1. Erzeugung des geometrischen Modells
2. Erstellung des numerischen Gitters
3. Diskretisierung der Problemgleichungen
4. Lösung des Gleichungssystems
5. Auswertung der Ergebnisse

Die Erzeugung des geometrischen Modells erfolgt im Allgemeinen mit Hilfe von CAD Programmen. Die Problemgeometrie wird dann über standardisierte Austauschformate (z.B. IGES oder STEP) an die Software zur Gittererstellung übergeben. Bei einfachen Geometrien kann auch auf Zusatzfunktionen des Gittergenerators zurückgegriffen werden, welche die Erstellung einfacher geometrischer Objekte direkt innerhalb der Software ermöglichen. Damit entfällt die nach einem Import aus einem CAD-Modell meistens nötige Bereinigung der Geometrie, mit welcher etwaige Lücken, Überschneidungen oder Unstetigkeiten in der Geometrie beseitigt werden müssen. Ursache dieser „Unreinheiten“ ist die häufige Benutzung sogenannter Bezier-Kurven im Rahmen von CAD Programmen gegenüber splines in der Software zur Gittererstellung.

3.1 Das numerische Gitter

Das numerische Gitter oder auch das Netz unterteilt das kontinuierliche Problemgebiet in viele kleine diskrete Teilgebiete, welche Kontrollvolumen oder Zellen genannt werden. Da bei vielen Berechnungsprogrammen pro Kontrollvolumen nur an einem Punkt (meistens im Mittelpunkt der Zelle) Variablenwerte berechnet werden, wird dieser Begriff häufig auch synonym mit Gitterpunkt verwendet. Das genaue Aussehen der Zellen hängt neben der Geometrie wesentlich von der Art des verwendeten Gitters ab. Hierbei gibt es zwei Möglichkeiten:

Strukturierte Gitter sind durch eine regelmäßige Anordnung der Gitterpunkte gekennzeichnet. Dabei können die Gitterlinien trotzdem stark gekrümmt und schief aussehen. Auf einem logischen Gebiet, also einem transformierten Einheitsgebiet, sind diese Gitter jedoch rechteckig (Abb. 3.1). Das Problem der Gittererzeugung bei

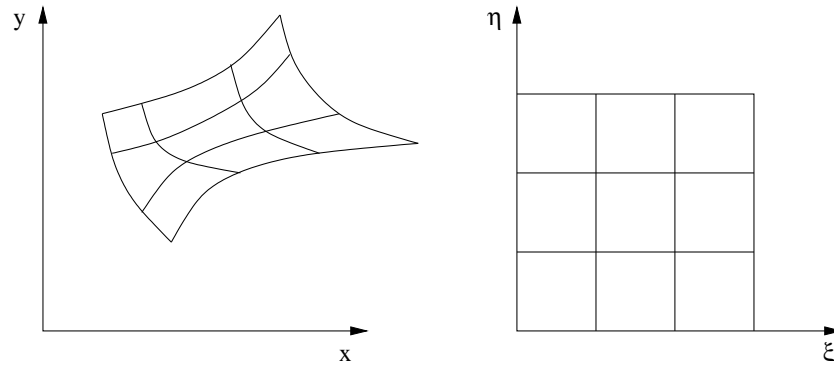


Abbildung 3.1: Zusammenhang zwischen physikalischem und logischem Gebiet ([56])

strukturierten Gittern besteht somit in der Erzeugung einer **eindeutigen Abbildung** zwischen logischem (ξ, η) und physikalischem (x, y) Gebiet. Die Eindeutigkeit wird durch die *Jakobi-Matrix*

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{usw.} \quad (3.1)$$

bestimmt. Dabei ist die geforderte Bedingung für Eindeutigkeit, dass für die *Jakobi-Determinante*

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0 \quad \text{gilt.} \quad (3.2)$$

Durch die regelmäßige Anordnung können die Nachbarschaftsbeziehungen der Gitterpunkte untereinander dadurch festgelegt werden, dass jeder Gitterpunkt nach einem bestimmten Muster abgerufen und wieder abgespeichert wird. Durch die Gitterstruktur sind dann je nach Muster auch immer die Identitäten der Nachbarn bekannt. Dies bedeutet sowohl speicher- als auch programmiertechnisch einen großen Vorteil, denn die Nachbarpunkte werden für die Diskretisierung der Gleichungen häufig benötigt und müssten andernfalls in Form ihres Speicherortes für jedes Kontrollvolumen zusätzlich als Information gespeichert werden. Doch gerade in dieser

Regelmäßigkeit liegt auch der Hauptnachteil der strukturierten Gitter begründet. Durch die Vorgabe, dass die Anzahl der Gitterpunkte in den jeweiligen Raumrichtungen gleich bleiben muss, ist eine Modellierung komplexer Geometrien oder eine lokale, evtl. nachträgliche Gitterverfeinerung sehr aufwändig oder gar unmöglich. Aus diesem Grund werden heutzutage hauptsächlich blockstrukturierte Gitter verwendet. Dazu wird das Rechengebiet zuerst in eine beliebige Anzahl an Blöcken unterteilt, innerhalb derer ein strukturiertes Gitter vorliegt, welche aber global gesehen irregulär angeordnet sein können. Dadurch ist es möglich, auch mit strukturierten Gittern uneingeschränkt komplexe Geometrien zu modellieren. Weiterhin ist damit eine effiziente Parallelisierung des Berechnungsverfahrens möglich. Allerdings ist die Gittererzeugung schlecht automatisierbar, so dass der Modellierungsaufwand mit der Komplexität der Geometrie sehr stark ansteigt. Trotzdem werden diese Gitter vor allem im Bereich der Forschung und Entwicklung gerne verwendet, da deren Gitterzellen so gut wie immer aus Hexaedern bzw. 2-dimensional aus Vierecken bestehen, welche gute numerische Eigenschaften besitzen, die gerade bei Verwendung der instationären Verfahren wie LES oder DNS sehr wichtig sind. Die wichtigste zu nennende Eigenschaft ist die geringe sogenannte **numerische Diffusion**. Dieser Effekt, der vor allem bei dreieckigen bzw. tetraederförmigen Elementen zu beobachten ist, äußert sich in einer unphysikalischen Erhöhung der im Problem vorhandenen molekularen Diffusion. Dadurch werden die Ergebnisse von Rechnungen, bei denen die modellierte turbulente Viskosität sehr klein (LES) oder gar nicht vorhanden ist (DNS), teilweise stark verfälscht.

Im Gegensatz zu strukturierten weisen **unstrukturierte Gitter** keinerlei Regelmäßigkeiten auf. Deshalb folgen die Nachbarschaftsbeziehungen keinen festen Mustern, was vor allem bei der Lösung des Gleichungssystems Probleme bereitet, da dieses nicht wie bei den strukturierten Gittern dünn besetzt ist, je nach Dimension und Diskretisierungsschema also wenige Diagonalen ungleich Null besitzt. Dafür bieten unstrukturierte Gitter größtmögliche Flexibilität bei der Modellierung der Geometrie und können optimal an den Rand angepasst werden. Sie kommen deshalb immer dann zur Anwendung, wenn kein strukturiertes Gitter mehr möglich ist. Gitterverfeinerungen sind ebenfalls leichter zu realisieren. Angestrebt wird bei der Erzeugung unstrukturierter Gitter die vollständige Automatisierung, wodurch der Aufwand zur Erzeugung der Gitter bei komplexen Geometrien um ein Vielfaches geringer ist als im strukturierten Fall. Von der Seite der Elemente gesehen, bestehen unstrukturierte Gitter meist aus einer Mischung von Tetraedern und Hexaedern, bzw. Dreiecken und Vierecken. Das Problem der erhöhten numerischen Diffusion, welches im Rahmen der strukturierten Gitter angesprochen wurde, wird meist dadurch versucht zu umgehen, dass in den Hauptinteressengebieten des Problems, überwiegend Hexaeder bzw. Vierecke verwendet werden. Auch das Zusammenschließen mehrerer Tetraeder zu sogenannten Polyedern stellt eine wichtige Verbesserung bezüglich dieses Problems dar, so dass in industriellem Rahmen fast ausschließlich unstrukturierte Verfahren zur Anwendung kommen, zumal die Mehrzahl der Berechnungen noch mit RANS-Modellen durchgeführt wird.

3.2 Die Finite-Volumen-Methode (FVM)

Nach der Diskretisierung des Problemgebietes mit der Gittererstellung müssen nun ebenfalls die Gleichungen, die das Problem beschreiben, diskretisiert werden. Dazu können prinzipiell vier verschiedene Methoden herangezogen werden:

- Finite-Differenzen-Methoden
- Finite-Volumen-Methoden
- Finite-Element-Methoden
- Spektralmethoden

Die Methode der Finiten Volumen eignet sich speziell zur Simulation strömungsmechanischer Probleme, da die Konservativität des Verfahrens, also die Erhaltungsprinzipien der zugrundeliegenden Gleichungen, per Definition für die diskretisierte Gleichung erfüllt ist. Aus diesem Grund ist diese die am häufigsten angewendete Methode für diese Art von Problemen und wird im Folgenden anhand des Beispiels einer allgemeinen Transportgleichung für die Variable ϕ und mit dem Diffusionskoeffizienten α genauer beschrieben.

Mit der Erzeugung des Gitters wurde das Problemgebiet in viele kleine Kontrollvolumen zerlegt. Für jedes dieser Kontrollvolumen werden nun die Bilanzgleichungen (2.11) - (2.13) betrachtet und über diese Volumen integriert, was hier beispielhaft anhand einer standardisierten, stationären Transportgleichung für die Variable ϕ durchgeführt wird:

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i \phi) dV}_{\text{Konvektionsterm}} = \underbrace{\int_V f dV}_{\text{Quelle}} + \underbrace{\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dV}_{\text{Diffusionsterm}} \quad (3.3)$$

Unter Benutzung des Gauß'schen Integralsatzes erhält man daraus:

$$\int_S \rho u_i \phi n_i dS = \int_V f dV + \int_S \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i dS \quad (3.4)$$

Hierbei ist dS ein Flächenelement des Kontrollvolumens, n_i der Einheitsvektor der Oberfläche (Abb. 3.2). Um die verschiedenen Seitenflächen zu identifizieren, wird im Allgemeinen eine Notation mit Himmelsrichtungen (Norden, Süden, Osten, Westen) verwendet. Mit dieser Notation wird das Oberflächenintegral in eine Summe der Integrale über die vier Kontrollvolumenseiten S_c aufgeteilt, wobei c stellvertretend für n, s, e, w steht:

$$\sum_c \underbrace{\int_S \rho u_i \phi n_i dS}_{F_c^K} = \int_V f dV + \sum_c \underbrace{\int_S \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i dS}_{F_c^D} \quad (3.5)$$

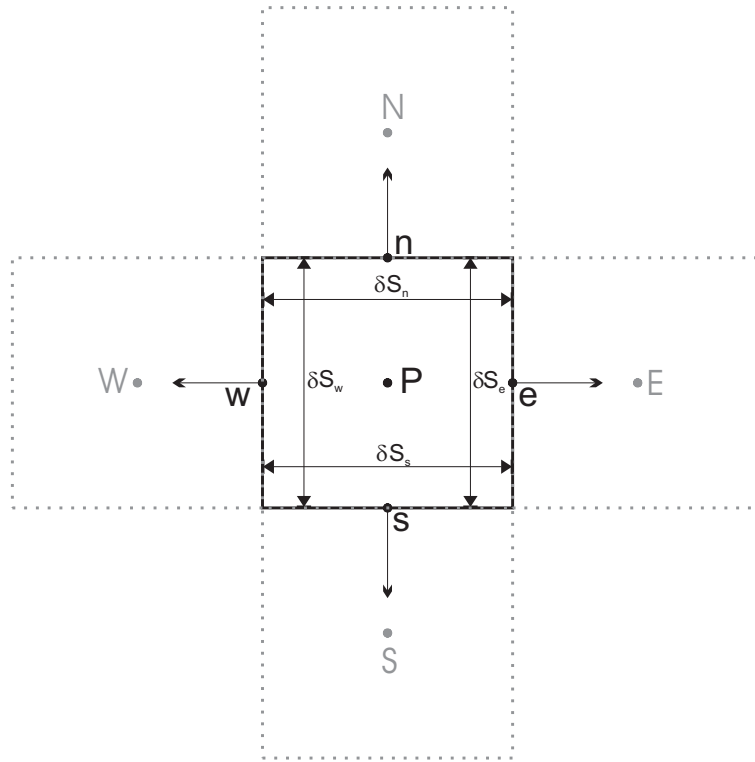


Abbildung 3.2: Kontrollvolumen (2D) mit Himmelsrichtungsnotation

Bis zu diesem Punkt wurde noch keine Approximation eingeführt, (3.5) ist also noch exakt. Die Diskretisierung und der damit verbundene Diskretisierungsfehler kommen erst durch die Approximation der Oberflächen- und der Volumenintegrale in (3.5) mit den Werten in den Kontrollvolumenmittelpunkten zum Tragen. Im Fall der Volumenintegrale und bei zellenmittelpunktorientierter Anordnung, wie es bei den meisten FVM-Programmen der Fall ist, ist die Annahme am einfachsten, dass der Wert f_p im Mittelpunkt des Kontrollvolumens einen Mittelwert von f über dieses Volumen darstellt:

$$\int_V f \, dV \approx f_p \delta V \quad (3.6)$$

Diese Approximation, welche als Mittelpunktsregel bezeichnet wird und einen Fehler 2. Ordnung besitzt, wird hier entsprechend Abb. 3.2 zweidimensional angewendet. Im allgemeinen dreidimensionalen Fall kann diese Regel analog auf Volumen übertragen werden und behält dort auch die gleiche Ordnung bei.

Im Unterschied zur Rückführung des Volumenintegrals auf die Werte in den Kontrollvolumenzentren, welche mit obigen Schritt schon abgeschlossen ist, sind bei den Oberflächenintegralen zwei Schritte notwendig:

1. Approximation der Oberflächenintegrale mit den Werten auf den Kontrollvolumenseiten (e,w,n,s)
2. Approximation der Werte auf den Kontrollvolumenseiten mit den Werten der Kontrollvolumenzentren (E,W,N,S,P)

Durch die erneute Benutzung der Mittelpunktsregel, jetzt im eindimensionalen Fall, erhält man für den konvektiven und den diffusiven Fluss im ersten Schritt

$$F_c^K = \rho u_i n_{i,c} \phi_c \delta S_c \quad \text{und} \quad F_c^D = \alpha n_{i,c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_c \delta S_c \quad (3.7)$$

wobei ϕ_c die Werte auf den Kontrollvolumenseiten darstellen. Mit „Mittelpunkt“ ist in diesem Zusammenhang also der Mittelpunkt der Seite, nicht der des Kontrollvolumens gemeint. Alternative Methoden zur Mittelpunktsregel sind z.B. die Trapezregel (2. Ordnung) oder auch die Simpsonregel, welche 4. Ordnung entspricht. Bei diesen Regeln werden mehrere Werte mit unterschiedlichen Gewichtungen in die Approximation miteinbezogen, so dass kompliziertere Formeln entstehen. Mit der Mittelpunktsregel jedoch erhält man somit insgesamt folgende Approximation:

$$\sum_c \underbrace{\rho u_i n_{i,c} \delta S_c}_{\dot{m}_c} \phi_c = f_p \delta V + \sum_c \alpha n_{i,c} \delta S_c \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_c \quad (3.8)$$

Während die Behandlung der konvektiven und diffusiven Flüsse im ersten Schritt noch gleich war, gibt es beim zweiten Schritt Unterschiede, die im Folgenden erläutert werden.

3.2.1 Diskretisierung der diffusiven Terme

Ein großer Vorteil der Finiten-Volumen-Methode ist die Tatsache, dass durch die Integration über das Volumen in Verbindung mit dem Gauß'schen Integralsatz eine Ableitung in den späteren Flusstermen wegfällt. Da Diffusion immer mit der zweiten Ableitung verbunden ist, bleibt somit für die diffusiven Flüsse nur noch eine Ableitung übrig, die es zu approximieren gilt (3.8). Eine der einfachsten Approximation ist die sogenannte Zentralfdifferenzenformel:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_c \approx \frac{\phi_C - \phi_P}{x_C - x_P} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_c \approx \frac{\phi_C - \phi_P}{y_C - y_P} \quad (3.9)$$

Diese impliziert einen linearen Verlauf von ϕ zwischen den Stellen x_C und x_P , wodurch der Näherungscharakter dieser Formel 2. Ordnung deutlich wird. Berücksichtigt man noch die Normalenvektoren, so ergibt sich der gesamte Diffusionsterm in (3.8) zu:

$$\alpha \delta S_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} \right) - \alpha \delta S_w \left(\frac{\phi_W - \phi_P}{x_W - x_P} \right) + \alpha \delta S_n \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{y_N - y_P} \right) - \alpha \delta S_s \left(\frac{\phi_S - \phi_P}{y_S - y_P} \right) \quad (3.10)$$

Um später das Gleichungssystem aufstellen zu können, muss in (3.10) eine Umsortierung vorgenommen werden, so dass die Werte der Kontrollvolumenzentren ϕ_C

isoliert stehen:

$$\begin{aligned}
 & - \underbrace{\left(\frac{\alpha \delta S_w}{x_P - x_W} + \frac{\alpha \delta S_e}{x_E - x_P} + \frac{\alpha \delta S_s}{x_P - x_S} + \frac{\alpha \delta S_n}{x_N - x_P} \right)}_{a_P^D} \phi_P + \underbrace{\left(\frac{\alpha \delta S_w}{x_P - x_W} \right)}_{a_W^D} \phi_W \\
 & + \underbrace{\left(\frac{\alpha \delta S_e}{x_E - x_P} \right)}_{a_E^D} \phi_E + \underbrace{\left(\frac{\alpha \delta S_s}{x_P - x_S} \right)}_{a_S^D} \phi_S + \underbrace{\left(\frac{\alpha \delta S_n}{x_N - x_P} \right)}_{a_N^D} \phi_N
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Der Superscript „D“ bedeutet dabei, dass es sich um den diffusiven Anteil am jeweiligen Koeffizienten handelt, welcher später noch zum konvektiven und zum Quellenanteil hinzuaddiert wird. Betrachtet man (3.11) genauer, dann wird folgendes ersichtlich

$$a_P^D = a_W^D + a_E^D + a_S^D + a_N^D = \sum_C a_C^D \tag{3.12}$$

Dies ist bei allen konservativen Verfahren, also auch bei der Finiten Volumen Methode, der Fall.

Dass es sich bei (3.9) um eine Formel 2. Ordnung handelt, lässt sich durch eine Taylorreihenentwicklung zeigen. Bei dieser fällt im Fall eines äquidistanten Gitters der Term mit der 2. Ableitung $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} \right)_c$ weg. Im Fall eines nicht äquidistanten Gitters bleibt der Term jedoch bestehen. Seine Größe ist proportional zum sogenannten **Expansionsverhältnis** $\xi_c = \frac{x_C - x_c}{x_c - x_P}$, welches ein Maß für den Größenunterschied der interagierenden Kontrollvolumen (E,W,N,S,P) ist. Das bedeutet, dass mit zunehmender Inhomogenität dieser Zellen, der Fehlerterm 1. Ordnung steigt. Aus diesem Grund muss bei der Gittererzeugung darauf geachtet werden, dass das Expansionsverhältnis nicht zu groß wird. Dies ist insbesondere bei LES-Berechnungen, bei denen die numerische Diffusion so klein wie möglich gehalten werden muss, extrem wichtig. Die Meinungen bezüglich konkreter Werte sind in der Literatur recht unterschiedlich, bewegen sich aber in einer Größenordnung von 1.01 – 1.05. Vergewegenwärtigt man sich jetzt, dass zur Auflösung der Wandgrenzschicht der erste Gitterpunkt bei $y^+ \approx 1$ liegen soll (vgl. Abschnitt 2.2.4 S.21), dann wird deutlich, wie weit das Gitter in das Rechenggebiet hinein durch diese Bedingung extrem fein bleiben muss.

Die Situation verschärft sich noch, wenn man sich einen weiteren Fehler anschaut, der durch unregelmäßige Gitterzellen, genauer durch das sogenannte **Seitenverhältnis** λ_p , verursacht wird. Für eine orthogonale Zelle, wie in Abb. 3.2 gezeigt, bei der sich dieses Verhältnis aus $\lambda_p = \frac{\delta S_n}{\delta S_e}$ bestimmen lässt, ergibt sich der Ost- bzw. der Nord-Koeffizient für Diffusion (3.11) beispielsweise zu:

$$a_E^D = \frac{\alpha}{\lambda_p} \quad \text{bzw.} \quad a_N^D = \alpha \lambda_p \tag{3.13}$$

Der Unterschied zwischen beiden Koeffizienten, die später auf unterschiedlichen Diagonalen in der aus den Koeffizienten gebildeten Systemmatrix stehen, ist somit proportional zu λ_p^2 . Bei einer starken Abweichung des Seitenverhältnisses vom optimalen Wert ($\lambda_p = 1$) (quadratische Zelle) nimmt dieser Unterschied somit überproportional zu. Ein großer Unterschied zwischen den Werten in den beiden Diagonalen hat

eine ungünstige Eigenwertverteilung der Systemmatrix zur Folge, was wiederum mit einer schlechteren Konvergenzrate einhergeht (vgl. Abschnitt 3.4 S. 52). Im Zusammenhang mit der Problematik der Expansionsrate bedeutet dies, dass mit der feinen Auflösung in wandnormaler Richtung automatisch auch eine feine Auflösung in wandparalleler Richtung nötig ist. Richtwerte für ein noch akzeptables Seitenverhältnis liegen ca. bei $\lambda_p < 10$ bzw. $\lambda_p > 1/10$. Mit strukturierten Gittern und ohne zusätzliche Techniken wie z. B. „hanging nodes“ ist dieser Wert in komplexen Geometrien mit einer akzeptablen Anzahl an Kontrollvolumen so gut wie nicht zu erreichen, so dass Werte von bis zu $\lambda_p = 1000$ keine Seltenheit sind und damit ein Konvergenzproblem vorprogrammiert ist. Neben dem Einfluss auf die Konvergenzrate ist durch extrem gestreckte Zellen gerade bei LES noch ein Problem mit dem Modell an sich verbunden, auf das im Abschnitt 2.4 S. 37 näher eingegangen wird. Im Fall von RANS-Rechnungen, bei denen die modellierte Viskosität ohnehin ein Vielfaches der molekularen Viskosität beträgt, ist der Einfluss der numerischen Diffusion nicht so gravierend, so dass die Expansionsrate durchaus $\xi = 2$ oder auch größer sein kann. Damit reduziert sich auch der andere angesprochene Fehler des Seitenverhältnisses außer in den ersten zwei oder drei Zellen an der Wand.

Theoretisch sind auch Approximationen höherer Ordnung möglich, z. B. 4. Ordnung. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass diese dann mit einem Verfahren 4. Ordnung auch im ersten Schritt (z. B. der Simpson-Regel) gekoppelt werden muss, um die Ordnung insgesamt bei vier zu erhalten. In der Praxis wird jedoch überwiegend die Zentraldifferenzenformel verwendet. Da es aufgrund des Fehlens der Geschwindigkeit bzw. des Massenstromes im Diffusionsterm und den damit verbundenen stets positiven Beiträgen zu den Koeffizienten keine Beschränktheitsprobleme gibt, muss auch außer bei den Randzellen nicht auf Vorwärts- oder Rückwärtsdifferenzen ausgewichen werden.

3.2.2 Diskretisierung der konvektiven Terme

Im Gegensatz zum Diffusionsterm taucht im Konvektionsterm zusätzlich die Geschwindigkeit u_i auf, wodurch er numerisch gesehen vor allem für Beschränktheitsprobleme bei der Lösung des Gleichungssystems verantwortlich ist, wie später gezeigt wird. Zunächst gilt es, die Variable ϕ_c im ersten Term von (3.8) mit Hilfe der umliegenden Kontrollvolumenwerte zu approximieren. Ähnlich (3.9) kann man hierzu eine lineare Interpolation zwischen C und P verwenden

$$\phi_c \approx \underbrace{\phi_C \frac{x_c - x_P}{x_C - x_P}}_{\gamma_c} + \underbrace{\phi_P \left(1 - \frac{x_c - x_P}{x_C - x_P}\right)}_{\gamma_c}, \quad (3.14)$$

wobei diese sowohl auf äquidistanten wie auch auf nicht-äquidistanten Gittern einen Fehler 2. Ordnung besitzt und Zentraldifferenzenverfahren (CDS) genannt wird. Eine Anfälligkeit des Diskretisierungsfehlers für hohe Gitterexpansionsraten besteht hier somit nicht.

Der Term γ_c wird als Interpolationsfaktor bezeichnet und ist durch das Gitter vor-

gegeben. Setzt man nun (3.14) in den ersten Term von (3.8) ein, so ergibt sich für diesen sortiert nach Werten der Kontrollvolumenzentren:

$$\begin{aligned} & \underbrace{[(1 - \gamma_e)\dot{m}_e + (1 - \gamma_w)\dot{m}_w + (1 - \gamma_n)\dot{m}_n + (1 - \gamma_s)\dot{m}_s]}_{a_P^K} \phi_P \\ & - \underbrace{[-\dot{m}_e \gamma_e]}_{a_E^K} \phi_E - \underbrace{[-\dot{m}_w \gamma_w]}_{a_W^K} \phi_W - \underbrace{[-\dot{m}_n \gamma_n]}_{a_N^K} \phi_N - \underbrace{[-\dot{m}_s \gamma_s]}_{a_S^K} \phi_S \end{aligned} \quad (3.15)$$

Vergleicht man die Koeffizienten untereinander, so ergibt sich wiederum die Darstellung des Zentralkoeffizienten als Summe der Nachbarkoeffizienten, denn die Summe der vier Massenströme muss nach der Massenerhaltungsgleichung Null ergeben.

$$a_P^K = \sum_C a_C^K - \underbrace{(\dot{m}_e + \dot{m}_w + \dot{m}_n + \dot{m}_s)}_{=0} \quad (3.16)$$

Die schon Eingangs erwähnte Beschränktheit, welche eine Eigenschaft des Diskretisierungsverfahrens ist, bedeutet, dass die errechnete Lösung innerhalb der physikalischen Grenzen bleibt, die durch die Randbedingungen vorgegeben werden. Ohne Quellen bei einem stationären Wärmeleitungsproblem z. B. darf die Temperatur im Inneren die vorgegebenen Randtemperaturen weder über- noch unterschreiten. Hinreichend für Beschränktheit ist die Bedingung

$$|a_P| \geq \sum_C |a_C|, \quad (3.17)$$

welche auch mit dem Stichwort **Diagonaldominanz** beschrieben werden kann. Die Diagonaldominanz, die eine entscheidende Rolle bei der Konvergenz spielt, ist aufgrund der Konservativität der FVM (3.12) und (3.16) automatisch immer dann erfüllt, wenn alle Koeffizienten das gleiche (meist positive) Vorzeichen haben. Die Diffusionskoeffizienten sind diesbezüglich unkritisch (3.11). Je nach Größe des Massenstroms, der bei den Konvektionskoeffizienten sowohl positive als auch negative Werte annehmen muss, können jedoch nach Summation der beiden Anteile Koeffizienten mit unterschiedlichen Vorzeichen auftreten, wodurch die Diagonaldominanz und damit die Bedingung für Beschränktheit verletzt wird. Als Folge davon ist es möglich, dass die Lösung überhaupt nicht konvergiert oder partiell unphysikalische Oszillationen, sogenannte „wiggels“, auftreten. Eng mit der Beschränktheit verbunden ist demnach das Verhältnis aus konvektivem zu diffusivem Transport, welches in der Peclet Zahl

$$Pe = \frac{\rho u \Delta x}{\alpha} \quad (3.18)$$

Ausdruck findet. Bei Benutzung von CDS z. B. darf diese Zahl auf äquidistanten Gittern nicht größer als zwei werden, um die Beschränktheitsbedingung nicht zu verletzen. Damit können sich je nach Stärke der Konvektion sehr strenge Einschränkungen für die Gitterweite Δx ergeben. Zur Veranschaulichung des Problems kann man sich vorstellen, dass mit zunehmender Konvektionsgeschwindigkeit in Richtung e (Abb. 3.2) der Einfluss der umliegenden Punkte immer kleiner wird, im Grenzfall

$Pe \rightarrow \infty$, ϕ_e sogar gleich ϕ_P wäre. Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, kann man das sogenannte Upwind-Verfahren (UDS) benutzen, bei welchem die Richtung, in der sich die Strömung bewegt, miteinbezogen und ϕ_c aus

$$\begin{aligned}\phi_c &= \phi_P, & \text{wenn } \dot{m}_c > 0 \\ \phi_c &= \phi_C, & \text{wenn } \dot{m}_c < 0\end{aligned}\quad (3.19)$$

bestimmt wird. Dieses Verfahren ist zwar immer beschränkt, besitzt allerdings einen vom Gitter unabhängigen Interpolationsfehler nur 1. Ordnung, was mit einer Taylorreihenentwicklung von ϕ und den Punkt x_P gezeigt werden kann. Berücksichtigt man diesen Fehlerterm, dann bestimmt sich bei positivem Massenstrom beispielsweise ϕ_e nicht aus ϕ_P alleine, sondern aus

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P, \quad (3.20)$$

so dass eingesetzt in (3.8) ein zusätzlicher Term entsteht, der im Aussehen einem diskretisierten Diffusionsterm ähnelt:

$$F_e^K = \dot{m}_e \phi_e = \dot{m}_e \phi_P + \underbrace{\dot{m}_e (x_e - x_P)}_{\alpha_{\text{num}}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P \quad (3.21)$$

Aufgrund der Ähnlichkeit wird dieser durch das Diskretisierungsschema verursachte Fehler als numerische Diffusion bezeichnet, wobei der numerische Diffusionskoeffizient durch den Massenstrom und das Gitter bestimmt wird. Diese künstliche Diffusion führt, wie schon angesprochen, vor allem bei LES-Simulationen zu fehlerhaften Ergebnissen, kann sich unter Umständen aber auch schon bei RANS-Verfahren stark bemerkbar machen. Um aber trotzdem von der Stabilität des UDS zu profitieren, kann man das sogenannte „flux-blending-Verfahren“ verwenden (Khosla und Rubin, 1974). Bei diesem Verfahren wird das unter bestimmten Bedingungen nicht beschränkte CDS mit dem immer beschränkten UDS über einen Faktor θ kombiniert:

$$\phi_c = (1 - \theta) \phi_c^{UDS} + \theta \phi_c^{CDS} \quad (3.22)$$

Ein flux blending Faktor von $\theta = 0$ bedeutet somit UDS, ein Faktor von $\theta = 1$ CDS, ein Wert dazwischen kombiniert die beiden, wobei die Eigenschaften (Genauigkeit vs. Beschränktheit) in gleicher Weise anteilig vorhanden sind.

Am Ende werden alle Koeffizienten aufsummiert und in eine generalisierte Form gebracht. Der Quellterm $f_p \delta V$, der unter Umständen auch wiederum die Variable ϕ_p enthalten kann (vgl. Abschnitt 2.3.1.2, S. 30), wird in die linearisierte Form $f_p \delta V = S_U + S_P \phi_P$ gebracht, so dass die generalisierte Form, die für alle inneren Kontrollvolumen gilt und somit für den Punkt P eindimensional gesehen von $2 \dots n - 1$ durchlaufen wird, folgendermaßen aussieht

$$\underbrace{(a_P^D + a_P^K - S_P)}_{a_P} \phi_P = \sum_C \underbrace{(a_C^D + a_C^K)}_{a_C} \phi_C + S_U \quad (3.23)$$

wobei

$$a_P = \sum_C a_C - S_P \quad (3.24)$$

3.3 Zeitdiskretisierung

Klassische RANS-Verfahren werden in den meisten Fällen stationär gelöst, was auch vollkommen dem Sinn dieser Verfahren entspricht, denn es handelt sich um zeitgemittelte Gleichungen. In diesem Fall verschwinden alle Ableitungen nach der Zeit in den Erhaltungsgleichungen ((2.11)-(2.13) S. 12). Bei hoch instationären Strömungen ist es jedoch manchmal nicht möglich, eine stationäre Lösung zu erhalten, was sich meist durch Oszillationen des Residuums nach einer gewissen Konvergenzphase äußert. Um trotzdem eine bzw. im Endeffekt eigentlich mehrere (für jeden Zeitschritt eine) konvergierte Lösungen zu erhalten, kann man in diesem Fall auf die sogenannten URANS-Verfahren (Unsteady RANS) ausweichen, bei denen die instationären Terme berücksichtigt werden. Dadurch ist es möglich, trotz des an sich stationären Charakters von RANS quasi instationäre Lösungen, also Zeitschritte zu erhalten. Wie Eingangs erwähnt, ist das jedoch nur bei hoch instationären Problemen möglich, bei denen nicht allzu hohe, stark ausgeprägte Frequenzen auftauchen. Ein typisches Beispiel für eine klassische URANS-Anwendung ist die Berechnung der Strömung um einen Zylinder zur Erfassung der Karman'schen Wirbelstraße. Im Fall von LES, bei welcher nicht zeitlich sondern räumlich gemittelt wird, ist es unabdingbar, immer instationär zu rechnen.

Zur Veranschaulichung der Methode wird wie schon bei der FVM eine allgemeine Transportgleichung für die Variable ϕ betrachtet, jetzt instationär:

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV}_{\text{Zeitterm}} + \underbrace{\int_V \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) dV}_{\text{Konvektionsterm}} = \underbrace{\int_V f dV}_{\text{Quelle}} + \underbrace{\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) dV}_{\text{Diffusionsterm}} \quad (3.25)$$

Die Ortsdiskretisierung, welche im vorherigen Kapitel besprochen wurde, wird direkt mit ihrem Endergebnis (3.23) eingesetzt und auf die rechte Seite gebracht. Für das Volumenintegral des Zeitterms verfährt man genauso wie für den Quellterm bei der Ortsdiskretisierung, bei welcher der Wert von ϕ gleich dem Wert im Mittelpunkt des Kontrollvolumen ϕ_P gesetzt wird. Damit ergibt sich bei konstanter Dichte:

$$\frac{\partial \phi_P}{\partial t} \rho \delta V = - \underbrace{a_P \phi_P + \sum_C a_C \phi_C}_{L(\phi)} + S_U \quad (3.26)$$

Zur Diskretisierung des instationären Terms können analog dem Vorgehen bei den diffusiven Termen Approximationen der Finiten Differenzen-Methode herangezogen werden, jetzt allerdings zeitlich gesehen. Benutzt man eine Vorwärtsdifferenz, erhält man folgenden Ausdruck für den Wert der Ableitung zum Zeitpunkt n

$$\left. \frac{\partial \phi_P}{\partial t} \right|^n \approx \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} \quad (3.27)$$

wobei Δt die Zeitschrittweite darstellt. Eingesetzt in (3.26) ergibt sich ein Ausdruck der Form

$$\phi_P^{n+1} = \phi_P^n + \frac{\Delta t}{\rho \delta V} L(\phi^n) \quad (3.28)$$

wobei $L(\phi^n)$ stellvertretend für die Ortsdiskretisierung zum Zeitpunkt n (3.23) steht. Da auf der rechten Seite dieser Gleichung nur Werte des (bekannten) Zeitpunktes n stehen, ist es möglich, den Wert ϕ_P^{n+1} zum neuen Zeitpunkt direkt oder explizit zu berechnen. Ein Verfahren, bei dem dies möglich ist, wird deshalb **explizites Verfahren** genannt. Wird wie oben eine Vorwärtsdifferenz 1. Ordnung benutzt, dann handelt es sich genauer um das explizite Euler-Verfahren. Da es allerdings nur ein Verfahren 1. Ordnung ist, werden in der Praxis eher andere, genauere Verfahren höherer Ordnung, z. B. Runge-Kutta-Verfahren, eingesetzt, welche sich für beliebige Ordnung definieren lassen. Das Problem aller dieser Verfahren, die aufgrund direkter Berechnung sehr schnell und deshalb beliebt sind, liegt in der Stabilität begründet. Um diese zu untersuchen, kann man unterschiedliche Verfahren anwenden (z. B. Neumann-Analyse), die relativ aufwendig sind, am Ende aber auf das gleiche Ergebnis wie eine einfache Betrachtung führen, die schon 1920 von Courant und Friedrichs gemacht wurde. Dazu wurde die Transportgleichung (3.25) in einer eindimensionalen Form und ohne Quellterme betrachtet. Benutzt man für die Ortsdiskretisierung $L(\phi)$, bei der im eindimensionalen Fall nur noch die Koeffizienten W , E und P übrigbleiben, UDS für den konvektiven Term und CDS für den diffusiven, dann wird (3.28) zu

$$\phi_P^{n+1} = \left(1 - 2\frac{\alpha\Delta t}{\rho\Delta x^2} - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\right) \phi_P^n + \left(\frac{\alpha\Delta t}{\rho\Delta x^2} + \frac{u\Delta t}{\Delta x}\right) \phi_W^n + \left(\frac{\alpha\Delta t}{\rho\Delta x^2}\right) \phi_E^n \quad (3.29)$$

wobei die Diffusionszahl $D = \alpha\Delta t/\rho\Delta x^2$ und die Courant-Zahl $C = u\Delta t/\Delta x$ auftauchen. Stabilitätsprobleme können immer dann auftreten, wenn nicht alle Koeffizienten ein positives Vorzeichen haben, da sich in diesem Fall bei einer Änderung von ϕ_P^n , ϕ_P^{n+1} nicht unbedingt in gleicher Weise ändern muss, was aber von physikalischer Seite her erfüllt sein muss. Ein Problem diesbezüglich stellt der erste Term in (3.29) dar, denn $(1 - 2D - C) > 0$ ist nur für

$$\Delta t < \frac{\rho\Delta x^2}{2\alpha + \rho u\Delta x} \quad (3.30)$$

erfüllt, wodurch sich eine aus Diffusion und Konvektion kombinierte Einschränkung für den Zeitschritt ergibt. Physikalisch lässt sich das Phänomen dadurch erklären, dass sich ein Fluidelement innerhalb eines Zeitschrittes aufgrund von Diffusion oder Konvektion nicht weiter als bis zur nächsten Zelle bewegen, also keine Zelle überspringen darf. Obwohl (3.30) eine kombinierte Bedingung darstellt, wird sehr häufig nur die Bedingung für Konvektion betrachtet (α bzw. $D = 0$), wodurch sich die bekannte **CFL-Bedingung**

$$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (3.31)$$

ergibt. Wie man anhand (3.28) sieht, hängt die gewonnene Stabilitätsbedingung von der verwendeten Ortsdiskretisierung ab. Bei der Verwendung von CDS für beide Terme ergibt sich somit eine unterschiedliche Bedingung. Allerdings hat es sich

etabliert, so gut wie immer die CFL-Bedingung, eventuell mit einer zusätzlichen Sicherheit, einzusetzen. Erinnert man sich an dieser Stelle an die Beschränkungsbedingung (3.18) S. 47, dann erkennt man einen entgegengesetzten Trend. Eine Pe -Zahl kleiner 2 bedeutet geringe Gitterweite Δx . Ein kleines Δx ist entsprechend der CFL-Bedingung aber direkt mit einer kleineren Zeitschrittweite verbunden, so dass bei hohen Geschwindigkeiten extrem kleine Zeitschritte benutzt werden müssen, was wiederum zu extrem langen Rechenzeiten vor allem im LES-Kontext führt. Verschärft wird die Situation, wenn man mit komplexen Geometrien arbeitet, in denen Gebiete mit stark unterschiedlichen Geschwindigkeiten auftreten (z. B. Drallbrennkammern), denn bei den meisten Berechnungsprogrammen wird mit einer globalen Zeitschrittweite gerechnet. Eine Überschreitung der CFL-Bedingung in nur einem Punkt reicht jedoch theoretisch schon aus, um eine instabile Lösung zu bekommen, so dass unter Umständen wegen einigen wenigen Punkten die Zeitschrittweite drastisch reduziert werden muss.

Abhilfe kann durch **implizite Verfahren** gewonnen werden. Der bekannteste Vertreter ist das implizite Euler-Verfahren, welches man erhält, wenn man anstatt einer Vorwärtsdifferenz eine Rückwärtsdifferenz bei der Approximierung der zeitlichen Ableitung annimmt:

$$\left. \frac{\partial \phi_P}{\partial t} \right|^{n+1} \approx \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} \quad (3.32)$$

Im Unterschied zur expliziten Methode wird jetzt die Ableitung zum Zeitpunkt $n+1$ ausgewertet, so dass in (3.26) auch die Ortsdiskretisierung zu diesem Zeitpunkt eingesetzt werden muss:

$$\phi_P^{n+1} = \phi_P^n + \frac{\Delta t}{\rho \delta V} L(\phi^{n+1}) \quad (3.33)$$

Da diese zum Zeitpunkt n noch nicht bekannt ist, muss die Lösung iterativ erfolgen, was einen zusätzlichen Aufwand bedeutet. Dafür sind die Vorfaktoren der Koeffizienten, wenn man die gleiche Analyse wie oben durchführt, immer positiv, so dass theoretisch keine Zeitschrittbegrenzung auftritt. In der Praxis der LES ist es jedoch aufgrund der Notwendigkeit der zeitlichen Auflösung der Strukturen in der Strömung trotzdem notwendig, kleine Zeitschritte zu benutzen, die aber erfahrungsgemäß immer noch um einen Faktor von ca. 10 höher liegen, als beim expliziten Verfahren. Dieser Gewinn muss allerdings dem Mehraufwand durch die Iterationen gegenübergestellt werden. Deshalb werden durchaus auch explizite Verfahren für LES-Rechnungen verwendet. Bei RANS jedoch sind eher die impliziten Verfahren die Methoden der Wahl.

Da gerade für LES-Rechnungen Verfahren möglichst hoher Ordnungen wichtig sind, kommt dabei i. A. nicht das implizite Euler-Verfahren, sondern das sogenannte **Crank-Nicolson-Verfahren** zum Einsatz. Dieses Verfahren stellt das genaueste Verfahren 2. Ordnung dar, welches vom Aufwand her aber nur geringfügig über dem impliziten Euler-Verfahrens liegt. Es wird dadurch realisiert, dass quasi eine zeitliche Zentralsdifferenz für die Zeitableitung zum Zeitpunkt $n + 1/2$ benutzt wird

$$\left. \frac{\partial \phi_P}{\partial t} \right|^{n+1/2} \approx \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} \quad (3.34)$$

wobei eine äquidistante Verteilung angenommen wird, so dass sich die räumliche Diskretisierung zu diesen Zeitpunkt aus den arithmetischen Mittel der Zeitpunkte n und $n + 1$ bestimmen lässt:

$$\phi_P^{n+1} = \phi_P^n + \frac{\Delta t}{\rho \delta V} \left[\frac{L(\phi^{n+1}) + L(\phi^n)}{2} \right] \quad (3.35)$$

Die Implementierung der Zeitterme in das Gesamtgleichungssystem ist zumindest für die Euler-Verfahren denkbar einfach, wenn man sich (3.33) und (3.23) anschaut. Für das implizite Euler-Verfahren sehen die algebraischen Gleichungen im Vergleich zu (3.23) folgendermaßen aus:

$$\underbrace{\left(a_P^{n+1} + \frac{\delta V \rho}{\Delta t} \right)}_{a_P^{n+1}} \phi_P^{n+1} = \sum_C a_C^{n+1} \phi_C^{n+1} + \underbrace{S_U + \frac{\delta V \rho}{\Delta t} \phi_P^n}_{b_P^{n+1}} \quad (3.36)$$

3.4 Gleichungslöser

Das Lösen des aus der Diskretisierung entstehenden linearen Gleichungssystems nimmt einen großen Teil der gesamten Rechenzeit in Anspruch. Deshalb ist es wichtig, einen guten Lösungsalgorithmus zu finden. Die zu lösenden Gleichungssysteme ergeben sich direkt aus den algebraischen Koeffizientengleichungen (3.23) oder (3.36), wenn man die Summe der Nachbarkoeffizienten auf die linke Seite bringt:

$$a_P \phi_P - \sum_C a_C \phi_C = b_P \quad (3.37)$$

Sind die Randbedingungen eingearbeitet, dann wird für jeden Punkt $i = 1 \dots N$ eine Gleichung aufgestellt (3.37), die in eine Matrix eingebaut werden kann. Daraus entsteht ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A} \phi = \mathbf{b} \quad (3.38)$$

Die Größe des Vektors ϕ und damit auch die von \mathbf{A} und \mathbf{b} ist dabei von der Anzahl der Elemente abhängig. Bei strukturierten Gittern hat \mathbf{A} eine Bandstruktur, je nach Dimension bei den oben gezeigten Diskretisierungsschemata und auf kartesischen Gittern mit 3 (E,W,P), 5 (E,W,N,S,P) oder 7 (E,W,N,S,T,B,P) Diagonalen. Kommen kompliziertere Schemata (z. B. QUICK) zum Einsatz, welche mehr Nachbarpunkte miteinbeziehen und/oder zusätzlich noch Punkte aufgrund der Nicht-Orthogonalität des Gitters, dann erhöht sich diese Zahl noch. Es ist jedoch immer so, dass die Matrix innerhalb der Bänder nicht besetzt ist. Bei unstrukturierten Gittern gibt es ebenfalls eine Bandstruktur, allerdings sind die Diagonalen innerhalb des Bandes im Gegensatz zur strukturierten Matrix voll besetzt, was anderer Lösungsverfahren bedarf.

3.4.1 Direkte Verfahren

Kennzeichen der direkten Verfahren ist eine **exakte** Lösung bei **einmaliger** Anwendung der Methode. Als bekanntester Vertreter ist hier das *Gauß-Verfahren* zu nennen. Der Nachteil der direkten Verfahren liegt darin, dass der Lösungsaufwand stark überproportional mit der Anzahl der Unbekannten wächst, wodurch diese Verfahren schon bei zwei- und erst recht bei dreidimensionalen Problemen nicht mehr verwendbar sind. Deshalb wird an dieser Stelle nicht näher darauf eingegangen. Für nähere Informationen ist [57] empfohlen.

3.4.2 Iterative Verfahren

Kennzeichen der indirekten Verfahren ist eine **Näherungslösung** bei **mehrmaliger** Anwendung der Methode. Die meisten iterativen Verfahren kann man in ein generelles Schema einordnen. Man gewinnt die Iterationsvorschrift, indem man das vorhandene Gleichungssystem (3.38) um den Term $\mathbf{B}\phi - \mathbf{B}\phi$ erweitert. Damit wurde die Gleichung nicht verändert, aber durch Einführung einer Iteration durch folgenden Schritt

$$\mathbf{B}\phi - \mathbf{B}\phi + \mathbf{A}\phi = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B}\phi^{k+1} - \mathbf{B}\phi^k + \mathbf{A}\phi^k = \mathbf{b} \quad (3.39)$$

erhält man schließlich die generelle Iterationsvorschrift

$$\phi^{k+1} = \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})}_{\text{Iterationsmatrix } \mathbf{C}} \phi^k + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}. \quad (3.40)$$

Die einzelnen Verfahren unterscheiden sich jetzt lediglich durch unterschiedliche Iterationsmatrizen \mathbf{C} , je nach Wahl von \mathbf{B} (\mathbf{I} und \mathbf{A} sind vorgegeben). Die Iterationsmatrix ist dabei entscheidend für die Effizienz des Verfahrens, denn dessen Konvergenzrate wird durch den betragsmäßig größten Eigenwert von \mathbf{C} bestimmt, der auch *Spektralradius* genannt wird. Dabei ist die Anzahl der nötigen Iterationen N_{It} , um den Anfangsfehler um einen Faktor ε zu reduzieren durch

$$N_{It} = \frac{C(\varepsilon)}{1 - \lambda_{max}} \quad \text{gegeben.} \quad (3.41)$$

Damit lassen sich für \mathbf{B} folgende Anforderungen formulieren:

1. λ_{max} von \mathbf{C} soll möglichst klein sein.
2. Ein Gleichungssystem mit \mathbf{B} soll einfach zu lösen sein.

Um der 1. Anforderung optimal zu genügen, müsste $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ sein, da sich so der Spektralradius λ_{max} zu Null ergeben würde. Für die 2. Anforderung wäre $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ optimal. Für die praktische Anwendung sind jedoch beide Extremfälle gleichermaßen schlecht geeignet, da sie jeweils die verbleibende Anforderung sehr schlecht erfüllen.

Es muss also ein Kompromiss zwischen beiden Anforderungen gefunden werden. Anstatt \mathbf{A} komplett zu benutzen, ist es möglich, nur Teile zu übernehmen. Gängig ist eine Zerlegung in die reine Diagonale, die Hälfte unter und die Hälfte über der Diagonalen

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_D + \mathbf{A}_L + \mathbf{A}_U. \quad (3.42)$$

Damit ergeben sich folgende Standardverfahren

- Jacobi-Verfahren : $\mathbf{B} = \mathbf{A}_D$
- Gauß-Seidel-Verfahren : $\mathbf{B} = \mathbf{A}_D + \mathbf{A}_L$
- SOR-Verfahren : $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{A}_D + \omega \mathbf{A}_L}{\omega}$

Der Parameter ω ist hier der sogenannte *Überrelaxationsparameter*, der zwischen 1 und 2 liegen kann und für die Konvergenzrate von entscheidender Bedeutung ist. Für $\omega = 1$ erhält man wieder das Gauß-Seidel-Verfahren. Für größer werdende Werte von ω konvergiert das Verfahren umso schneller, allerdings nicht beliebig, sondern bei zu großem ω divergiert das Verfahren. Typische Werte für ω liegen zwischen 1,1 und 1,2.

Ein Verfahren, das sich ebenfalls in dieses Schema einteilen lässt, ist das der unvollständigen LU-Zerlegung (**ILU-Verfahren**). In diesen Fall wird $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{U}}$ gewählt, wobei $\mathbf{A} \approx \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{U}}$. Die Bestimmung von $\tilde{\mathbf{L}}$ und $\tilde{\mathbf{U}}$ ist nicht so einfach wie bei den Standardverfahren, aber durch diese Wahl von \mathbf{B} erhält man ein sehr effizientes Lösungsverfahren. Für genauere Ausführungen zur Bestimmung von $\tilde{\mathbf{L}}$ und $\tilde{\mathbf{U}}$ und zu den Standardverfahren sei auf [57] verwiesen.

Ebenfalls iterative Verfahren, aber nicht in das Standardschema einteilbar, sind die **Gradienten-Verfahren**. Die Idee hierbei ist, ein zum Gleichungssystem (3.38) äquivalentes Problem zu finden, welches leichter als das ursprüngliche zu lösen ist. Im Fall der Gradienten-Verfahren ist dies das *Minimierungsproblem* der Potentialfunktion

$$F(\phi) = \frac{1}{2}\phi \cdot \mathbf{A}\phi - \mathbf{b}\phi. \quad (3.43)$$

Die verschiedenen Verfahren unterscheiden sich lediglich in der Art, wie das Minimum der Funktion gesucht wird. Der große Vorteil dieser Verfahren ist nun, dass sie in Bezug auf Konvergenz nahezu unabhängig von der Struktur von \mathbf{A} sind. Dadurch sind sie, im Gegensatz zu den oben genannten Verfahren, bei denen eine dünnbesetzte Matrix Voraussetzung für effiziente Lösung ist, für unstrukturierte Gitter ebenso geeignet wie für strukturierte. Für mehr Informationen siehe auch hier [57].

3.5 Druck-Geschwindigkeitskopplung

Die Art und Weise, wie der Druck und die Geschwindigkeit im Rahmen der Navier-Stokes'schen Gleichungen gekoppelt sind, bringt für die Lösung des Gesamtsystems Schwierigkeiten mit sich. Um das Problem zu verdeutlichen, werden die Gleichungen (2.11) und (2.12), S. 12, betrachtet. Es fällt auf, dass die Geschwindigkeitskomponenten in beiden Gleichungen auftreten, der Druck dagegen zwar in Form eines Gradienten in der Impulsgleichung, nicht aber in der Kontinuitätsgleichung vorkommt. Die numerische Lösung dieses Gleichungssystems muss aber alle Gleichungen gleichzeitig erfüllen. Das bedeutet, dass bei einem korrekt vorgegebenen Druckgradienten das resultierende Geschwindigkeitsfeld die Kontinuitätsgleichung erfüllen muss, was aber aus oben genanntem Grund nicht notwendigerweise der Fall sein muss. Die verbreitetste Lösung für dieses Problem ist die Verwendung einer iterativen Prozedur, welche auf Basis eines geschätzten (oder aus der vorherigen Iteration bekannten) Druckfeldes zunächst ein vorläufiges Geschwindigkeitsfeld erzeugt. Aus diesem wird zusammen mit der noch nicht erfüllten Kontinuitätsgleichung ein neues, korrigiertes Druck- und Geschwindigkeitsfeld berechnet. Die Iterationsvorschrift, die dafür eingeführt werden muss, gestaltet sich für die Koeffizientengleichungen (3.23) oder (3.36) folgendermaßen:

$$a_P^k \phi_P^{k+1} - \sum_C a_C^k \phi_C^{k+1} = b_P^k \quad (3.44)$$

Dabei gelten die Koeffizienten als bekannt und stammen aus der vorherigen Iteration, bzw. im ersten Iterationsschritt aus dem vorherigen Zeitschritt oder der Startlösung. Mit diesem Schritt wird zusätzlich eine Linearisierung der Gleichungen erreicht. Dies kann man unmittelbar einsehen, wenn man anstatt der allgemeinen Transportgleichung die diskretisierte Impulsgleichung betrachtet (hier für die u -Komponente):

$$a_P^k u_P^{k+1} - \sum_C a_C^k u_C^{k+1} = b_P^k - \frac{p_E^{k+1} - p_W^{k+1}}{2 \Delta x} \delta V \quad (3.45)$$

Die Koeffizienten a_P^k , a_C^k und b_P^k sind dabei im Allgemeinen natürlich nicht gleich denen aus (3.44). Die ersten beiden enthalten unter anderem die Massenströme und damit wiederum die Geschwindigkeiten der einzelnen Seiten, wodurch zusammen mit u_P bzw. u_C die Nichtlinearität der Gleichungen abgebildet wird. Diese Geschwindigkeiten auf den Seiten sind normalerweise genauso wie Variablen u_P bzw. u_C unbekannt, was sich durch Einführung der Iterationsvorschrift jedoch ändert, so dass (3.45) zu einer linearen Gleichung wird. Gemäß der oben beschriebenen Prozedur wird im ersten Schritt ein geschätztes Druckfeld benutzt, um das vorläufige Geschwindigkeitsfeld u^* zu bestimmen:

$$a_P^k u_P^* - \sum_C a_C^k u_C^* = b_P^k - \frac{p_E^* - p_W^*}{2 \Delta x} \delta V \quad (3.46)$$

Der Zusammenhang zwischen den „*“-Größen und „ $k+1$ “ ist dabei durch

$$u^{k+1} = u^* + u' \quad \text{und} \quad p^{k+1} = p^* + p' \quad (3.47)$$

gegeben, wobei „'“ die jeweiligen Korrekturen darstellen. Erzeugt man durch Subtraktion von (3.45) und (3.46) eine Gleichung für u' und führt das auch für alle anderen Geschwindigkeitskomponenten sowie für die Kontinuitätsgleichung durch, dann kann man unter Vernachlässigung bestimmter Terme eine Gleichung für die Druckkorrektur p' gewinnen, mit deren Hilfe wiederum die Korrekturen für die Geschwindigkeiten bestimmt werden können. Vernachlässigt man dabei alle Beiträge der Geschwindigkeitskorrekturen der Nachbarpunkte, dann erhält man das bekannteste **Druckkorrekturverfahren**, die von Patankar und Spalding (1972) vorgeschlagene „Semi Implizit Method for Pressure Linked Equations“ (SIMPLE). In der Praxis hat sich gezeigt, dass je nach Güte des geschätzten Druckfeldes starke Konvergenzprobleme auftreten können, so dass es unverzichtbar ist, für alle Variablen sogenannte *Unterrelaxationsparameter* $\alpha \in [0, 1]$ einzuführen, die im Grunde regeln, wie stark die berechneten Korrekturen im neuen Iterationsschritt übernommen werden:

$$p^{k+1} = p^* + \alpha_p p' \quad \text{und} \quad u^{k+1} = \alpha_u (u^* + u') + (1 - \alpha_u) u^k \quad (3.48)$$

Dabei ist wichtig zu bemerken, dass im Fall einer konvergierten Lösung, die Stärke der Unterrelaxation bzw. die Wahl von α keinen Einfluss auf die errechnete Lösung hat. Die Wahl der optimalen Parameter ist dabei zum einen entscheidend für das Verfahren, zum anderen aber auch nicht eindeutig und zudem noch von Problem zu Problem verschieden. Mit

$$\alpha_p \approx 1 - \alpha_u \quad (3.49)$$

ist in [49] eine gute Hilfestellung gegeben.

Ein weiteres Problem bezüglich der Lösung der Gleichungen wird anhand von (3.45) deutlich. Der Druckgradient ist hier mit Zentraldifferenzen approximiert. Wie man sieht, taucht in dieser Gleichung für die Geschwindigkeit am Punkt P nur der Druck in den benachbarten Zellen auf. Damit ist es theoretisch möglich, ein schachbrettartiges Druckfeld vorzugeben, welches trotzdem kein Geschwindigkeitsfeld erzeugen würde, da in jedem zweiten Feld der Druck ja gleich ist und somit kein Gradient entsteht. Um diesem Problem zu begegnen, ist es möglich, auf versetzten Gittern zu rechnen. Bei diesem sogenannten „staggered grids“ werden die Geschwindigkeitskomponenten nicht an der gleichen Stelle ausgewertet und gespeichert, wie die skalaren Variablen. Damit wird zum einen das „Schachbrettproblem“ gelöst, zum anderen ergibt sich ebenfalls der Vorteil, dass die Geschwindigkeiten an den Kontrollvolumenseiten verfügbar sind, an denen sie von der Diskretisierung her ohnehin gebraucht werden (3.8). Es entfällt somit eine zusätzliche Interpolation. Bei nicht-kartesischen Gittern und komplexen Geometrien gerade auch in Verbindung mit Mehrgitterverfahren muss dieser Vorteil jedoch mit zunehmenden Problemen im Speichermanagement und der notwendigen Benutzung gitterorientierter Geschwindigkeitskomponenten aufgewogen werden, so dass in neueren Berechnungsprogrammen trotzdem meist nicht-versetzte Gitter („**colocated grids**“) verwendet werden. Eine dann notwendige andere Lösung für das Problem mit dem Druck wurde 1983 von Rhie und Chow als sogenannte „selektive Interpolation“ eingeführt.

3.6 Randbedingungen

Randbedingungen werden im Rahmen von CFD erfahrungsgemäß nicht die Aufmerksamkeit gewidmet, die sie verdienen oder benötigen. Ihre Wichtigkeit wird ersichtlich, wenn man sich bewusst macht, dass die Gleichungen, die man mit dem Berechnungsprogramm zu lösen versucht, theoretisch unendlich viele Lösungen besitzen und die eine Lösung, die man in seinem speziellen Fall bekommen möchte, alleine durch die vorgegebenen Randbedingungen festgelegt wird. Anders ausgedrückt ist das Strömungs- oder Skalarfeld, das sich bei der Berechnung einstellt, nur eine Abbildung der Randbedingungen auf das Problemgebiet. Mit falschen oder ungenügend genauen Randbedingungen ist ein fehlerhaftes Ergebnis somit zwangsläufig. Das Problem dabei ist, dass die einzige immer eindeutige Randbedingung die Haftbedingung an der Wand ist. Alle anderen Bedingungen sind mit einer gewissen Unschärfe behaftet, die aus notwendigen Vereinfachungen oder aus mangelnden Informationen herrührt. Bei low-Ma-Zahl-Verfahren wird als Ausstromrandbedingung z. B. häufig die sogenannte Nullgradientenbedingung verwendet. Diese besagt, dass sich in Strömungsrichtung (n) keine Änderung der Größe ϕ mehr ergibt.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (3.50)$$

Damit ist nicht nur eine Vereinfachung gemacht, welche für viele Strömungen nicht erfüllt sein wird, sondern die gesamte Lösung wird zudem stark abhängig von der Lage des Ausstromes. Durch den elliptischen Charakter der Navier-Stokes'schen Gleichungen im Unterschall hat der Ausstrom direkte Rückwirkungen auf das stromaufgelegene Strömungsfeld. Da die Annahme für instationäre Methoden (URANS, LES, DNS) generell bedenklich ist, wird in diesem Fall die gegenüber der Nullgradientenbedingung erweiterte konvektive Auslassrandbedingung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_{konv} \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (3.51)$$

verwendet. Parameter bleibt hier die konvektive Ausstromgeschwindigkeit U_{konv} , für welche meist eine Art mittlere Geschwindigkeit gewählt wird. Für sehr große Werte von U_{konv} geht diese Randbedingung wieder in die Nullgradientenbedingung über. Ebenfalls nicht unkritisch ist die Einlassrandbedingung. Während für stationäre Verfahren (RANS) die Vorgabe eines bestimmten mittleren Geschwindigkeitsprofils noch relativ unbedenklich ist, sofern die Position der Einlassebene nicht zu ungünstig gewählt ist, stellt die Vorgabe der Einlasswerte für die turbulenten Gleichungen dieser Verfahren (z. B. k und ε) schon ein größeres Problem dar. Damit es keine zusätzlichen Konvergenzprobleme gibt, sollten diese kompatibel sein, d.h. zueinander passen. Eine einfache Möglichkeit für k und ε ergibt sich nach [71] zu

$$k = \frac{3}{2}(U_{ref} Tu)^2 \quad \text{und} \quad \varepsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{0.07 L_{ref}} \quad (3.52)$$

Für instationäre Methoden kommt noch ein weiteres Problem hinzu. Da man im Innern des Berechnungsgebietes instationäre Felder hat, muss der Einlass im Prinzip

auch schon instationäre Daten beinhalten. Dabei stellte sich heraus, dass es nicht ausreichend ist, dem vorhandenen stationären Profil irgendwelche Fluktuationen zu überlagern. Vielmehr muss das Einlassfeld möglichst reale Turbulenz, d.h. passende Strukturen und Korrelationen, besitzen, so dass der Aufwand am Einlass um ein Vielfaches größer wird. Eine Möglichkeit ist die Durchführung einer separaten Rechnung zur Erzeugung dieser Daten (sog. precursor simulation) oder die Erzeugung möglichst realer, künstlicher Fluktuationen. Verwendet man grobe Gitter bei LES-Rechnungen mit hohen Re-Zahlen, so hat sich die Möglichkeit der Rechnung mit stationärem Einfluss gezeigt, da sich die benötigten turbulenten Strukturen in diesem Fall relativ schnell von alleine bilden. Die Auswirkungen einer solchen Vorgehensweise auf die Lösung sind allerdings noch nicht umfassend geklärt und teilweise umstritten.

Während periodische Randbedingungen im RANS-Kontext relativ unkritisch sind, ist deren Einsatz bei instationären Verfahren mit Fragen behaftet. Handelt es sich um Periodizität in Strömungsrichtung wie beispielsweise bei einer periodischen Rohrströmung, dann ist deren Benutzung im Allgemeinen akzeptiert. Periodizität in Richtungen senkrecht zur Strömungsrichtung (z. B. nur einen Viertel eines Rohres) hingegen kann mögliche dreidimensionale Turbulenzmechanismen unterdrücken und somit die Lösung negativ beeinflussen. Allein aus Kostengründen wird dennoch häufig auf diese Art der periodischen Randbedingung zurückgegriffen. Ähnlich verhält es sich im Prinzip mit Symmetrierandbedingungen, wobei diese für die instationären Methoden noch etwas kritischer sind als die periodischen Randbedingungen.

3.7 FASTEST

Das hybride LES/RANS-Turbulenzmodell wurde in den Strömungslöser FASTEST implementiert. Dieser 3D Navier-Stokes Code für kleine Mach-Zahlen basiert auf der Finiten-Volumen-Methode. Die Druck-Geschwindigkeitskopplung wird über das Druckkorrekturverfahren SIMPLE realisiert, wobei auf strukturierten, randangepassten, nicht versetzten Gittern gerechnet wird. Für die Diskretisierung der konvektiven Terme wird das sogenannte „Flux-Blending-Verfahren“ benutzt. Die Zeitdiskretisierung erfolgt mittels der Crank-Nicolson-Methode. Als Gleichungslöser kommt eine ILU-Verfahren in Verbindung mit der SIP-Methode zum Einsatz. Mit diesen Charakteristika ist das Programm den gängigsten kommerziellen Strömungslösern sehr ähnlich. Führt man sich noch einmal vor Augen, dass die oben angesprochenen Einzelverfahren (SIMPLE, ILU/SIP und Crank-Nicolson) implizite Verfahren darstellen, also durch Iterationen gelöst werden müssen, dann wird deutlich, aus wie vielen Einzeliterationen die Lösung eines einzigen Zeitschritts besteht. Dass es bei kommerziellen Programmen in ähnlicher Weise realisiert wird, zeigt jedoch, dass es sich um eine sinnvolle Herangehensweise für Berechnungen im industriellen Rahmen handelt.

Kapitel 4

Zur Methode des hybriden LES/RANS-Verfahrens (HLR)

Das größte Hindernis für die effiziente Nutzung der Large-Eddy Simulation (LES) im Fall von durch Wandeffekte beeinflussten Strömungen mit hohen Reynoldszahlen ist die extrem hohe Zellendichte, die nötig ist, um das wandnahe Gebiet aufzulösen. Wie in Abschnitt 2.2.4 beschrieben und in Abb. 4.1 noch einmal verdeutlicht, wird die Größe der großen, energietragenden Wirbel zur Wand hin immer geringer, so dass ihre Erfassung Zellendichten der Größenordnung einer DNS erfordert. Außerdem muss mit einer Erhöhung der Anzahl der Gitterpunkte in Wandnormalen-Richtung auch die Zellenanzahl in den beiden anderen Raumrichtungen parallel zur Wand erhöht werden, um ein Zellenseitenlängenverhältnis von $\lambda_p = O(1/10)$ nicht zu unterschreiten. Eine Verkleinerung dieses Verhältnisses weit unter den angegebenen Wert führt bei einer LES im Zusammenhang mit nicht dissipativen Diskretisierungsverfahren (z. B. CDS) zu numerischen Problemen, die sich häufig durch lokale Oszillationen (wiggles) äußern. Um diesem Problem zu begegnen, wurden in den letzten Jahren zwei verschiedene Ansätze verfolgt:

- zum einen **Wandfunktionen**, bei denen die wandnahe Region durch ein universelles Wandgesetz überbrückt wird
- zum anderen **hybride Modelle**, bei denen in der wandnahen Region ein anderes Modell als in der Kernströmung eingesetzt wird

Die Überbrückung der wandnahen Region wird dadurch möglich, dass mit Hilfe des universellen Wandgesetzes die durch die Wand verursachte Schubspannung an einem Punkt in einiger Entfernung von der Wand bestimmt und damit als Randbedingung an dieser Stelle vorgegeben werden kann. Der Nachteil dieser Vorgehensweise ist in der beschränkten Gültigkeit des verwendeten universellen Gesetzes (meist logarithmisches Wandgesetz) zu sehen. Stichwort diesbezüglich ist das Vorliegen einer Gleichgewichtsströmung (lokales Gleichgewicht zwischen Produktion und Dissipation und ein nicht vorhandener oder geringer Druckgradient), wie es z. B. bei voll

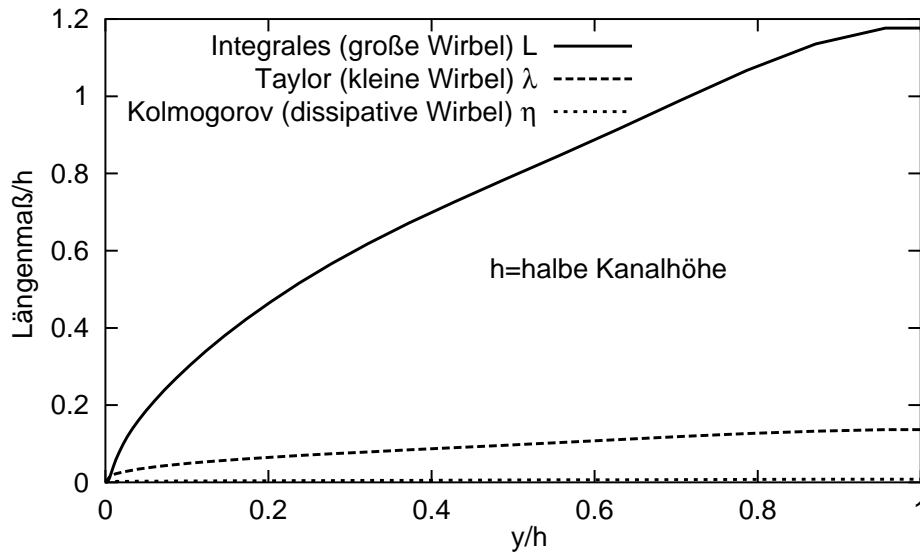


Abbildung 4.1: Verlauf der charakteristischen Längenmaße in Wandnormalenrichtung einer Kanalströmung

entwickelten Kanalströmungen der Fall ist (vgl. Abschnitt 2.2.4 auf Seite 21). Folglich liefert diese Methode bei Strömungen, die sich nicht im Gleichgewicht befinden, schlechte Ergebnisse, auf jeden Fall im wandnahen Gebiet, oft auch im Kerngebiet der Strömung. Beispiele solcher Strömungen sind abgelöste Strömungen oder Drallströmungen, wie man sie auch in Brennkammern antrifft. Ein zusätzliches Problem, welches durch die Verwendung instationärer Verfahren (z. B. LES) auftritt ist die Tatsache, dass selbst bei Vorliegen einer Strömung, in der das Wandgesetz im zeitlichen Mittel gelten würde, dieses für einen Momentanwert nicht unbedingt der Fall sein muss.

Bei den hybriden Modellen wird die kritische Wandschicht nicht überbrückt, sondern mit einem anderen Modell behandelt, welches durchaus auch einen anderen, beispielsweise vereinfachten parabolischen Gleichungssatz verwenden kann (vgl. TSL-Methode in Abschnitt 1.2, Seite 3). Im Rahmen der hybriden LES/RANS-Modelle wird in der Wandschicht ein RANS-Modell verwendet. Da man gerade keine Wandfunktionen benutzen möchte, muss es sich um eine low-Re Version handeln. Dies bedeutet, dass die gesamte Grenzschicht bis zur Wand hin aufgelöst und die Haftbedingung angewendet wird, so dass das Gitter bis zu einer Größenordnung von ($y^+ \approx 1$) die Wand heranreichen muss. Die damit verbundene hohe Auflösung bringt noch keinen nennenswerten Gewinn gegenüber einer reinen LES. Der Hauptvorteil dieser Methode liegt jedoch darin, dass RANS-Modelle mit wesentlich größeren Seitenlängenverhältnissen (100 - 1000) problemlos rechnen können und trotzdem noch gute Ergebnisse liefern. Dieses liegt in der geringen Änderung der statistischen Turbulenzgrößen parallel zur Wand gegenüber denen normal zur Wand begründet. Analog den Längenmaßen verringern sich ebenfalls die Zeitmaße bei Annäherung an die Wand. Strukturen, die vorher nur durch sehr kleine Zeitschrittweiten aufgelöst werden konnten, liegen jetzt im RANS-Gebiet, in welchem die Strukturen nicht mehr aufgelöst, sondern modelliert werden. Aus diesem Grund kann neben der räumlichen

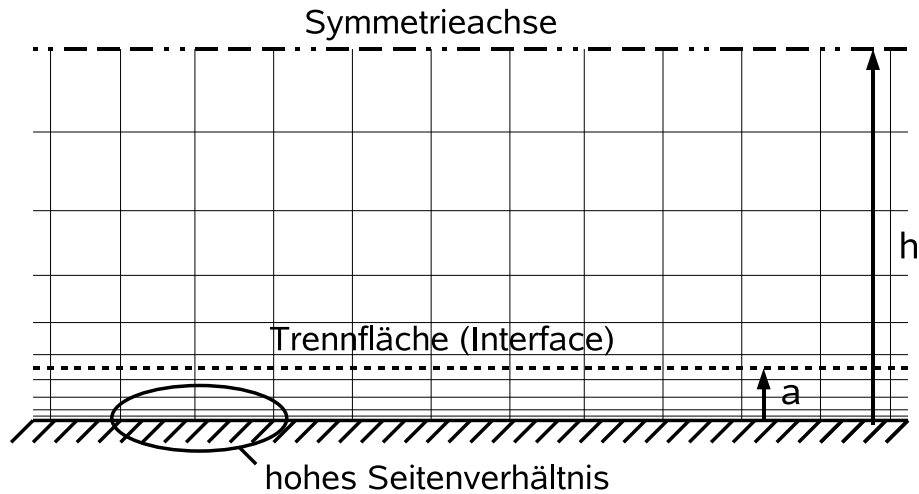


Abbildung 4.2: Skizze zur Idee des hybriden LES/RANS-Verfahrens

auch die zeitliche Auflösung verringert und damit die Zeitschrittweite erhöht werden. Abbildung 4.2 verdeutlicht die beschriebene Situation anhand einer Skizze. In dieser Konfiguration, mit einer horizontalen Trennfläche, fungiert das RANS-Modell als ein Wandmodell für LES und so wird es in der vorliegenden Arbeit gemäß der gesetzten Zielsetzung (1.1) auch verstanden. Damit ist die Basis für weitere Untersuchungen festgelegt.

4.1 Anforderungen an das Modell

Der wichtigste Schritt bei der Entwicklung eines neuen Modells ist die Analyse der Anforderungen, die an das Modell gestellt werden. Erst danach kann mit der gezielten Entwicklung begonnen werden. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, zielt das Modell auf die Berechnung von Brennkammerströmungen mit allen ihren genannten Eigenschaften ab. Zudem ist die oben beschriebene **Funktionalität als Wandmodell** als weiteres Ziel vorgegeben. Damit ergeben sich folgende Anforderungen:

- Erfassung komplexer Strömungsfälle
- Anwendbarkeit auf komplexe Geometrien
- Robustheit
- Flexibilität
- Allgemeingültigkeit soweit (mit RANS) möglich
- Einfachheit der Bedienung
- Einfachheit der Programmierung

Aus diesen Anforderungen lassen sich einige Voraussetzungen für das Modell ableiten. Aufgrund der Anwendbarkeit in komplexen Geometrien sowie der Einfachheit der Bedienung bietet sich eine simultane Lösung in einem Gleichungssystem an. Somit kann der Benutzer wie gewohnt das Pre- und Postprocessing durchführen, die Benutzung des hybriden Verfahrens läuft quasi im Hintergrund ab. Eng mit der Lösung in einem Gleichungssystem verbunden ist die Forderung nach einfacher Programmierung und Robustheit, denn diese simultane Lösung ist sinnvollerweise nur möglich, wenn die Kopplung der beiden Verfahren über die turbulente Viskosität μ_t realisiert wird. Diese Kopplung ist einfach zu programmieren, da die Form der RANS- und LES-Gleichungen in diesem Fall gleich ist (vgl. Abschnitt 2.4, Seite 35). Mit der Kopplung über μ_t wird gleichzeitig auch von der Robustheit der Wirbelviskositätsmodelle Gebrauch gemacht. Damit ist man allerdings bei der Benutzung des Verfahrens auf Wirbelviskositätsmodelle bzw. Modelle, bei denen die Boussinesq'sche Relation zur Bestimmung der turbulenten Scheinspannungen benutzt wird, angewiesen. Somit scheiden Reynoldsspannungsmodelle zur Kopplung eigentlich aus, es sei denn man berechnet doch wieder eine turbulente Viskosität aus den Reynoldsspannungen wie in [6]. Dies kann im ersten Moment als Einschränkung in Bezug auf die Erfassung komplexer Strömungsfälle verstanden werden, denn dort werden komplexe Modelle gebraucht. Im Verlauf der Untersuchungen stellte sich jedoch heraus, dass dies nicht unbedingt der Fall ist, sondern Wirbelviskositätsmodelle ausreichend gute Modelle für die Kopplung darstellen. Aus der Forderung nach Flexibilität leitet sich ab, dass eine zonale Methode, bei der in beiden Regionen unabhängig voneinander verschiedene Modelle verwendet werden können, sinnvoll ist. Der Flexibilität wegen darf jedoch die Trennfläche zwischen den beiden Regionen nicht fixiert sein, sondern muss variabel gehalten werden. Verglichen mit der Unterteilung der hybriden Verfahren in Abschnitt 1.2 ergibt sich somit eine locker zonale Konfiguration als Ergebnis der Anforderungsanalyse.

4.2 Modellentwicklung

Nach der Analyse der Anforderungen an das Modell und den daraus abgeleiteten Voraussetzungen für das Modell, kann nun mit der eigentlichen Modellentwicklung begonnen werden. Dazu wird zunächst eine Testkonfiguration ausgewählt, an der grundlegende Untersuchungen schnell und unkompliziert, aber trotzdem aussagekräftig durchgeführt werden können. Eine Konfiguration, die genau das bietet ist die Kanalströmung, denn diese vereint eine sehr einfache Geometrie mit einer gleichzeitig hohen Anforderung an die Wandbehandlung. Aufgrund dieser Eigenschaften ist diese Strömung als Testfall generell sehr verbreitet. Dadurch ist es zudem einfach, experimentelle oder gar DNS-Vergleichsdaten für eine weite Spanne an Reynoldszahlen zu finden. Mit Rücksicht auf schnelle Berechnungen werden moderate Reynoldszahl von zunächst $Re_\tau = 800$ und später $Re_\tau = 640$, basierend auf der Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ , ausgewählt. Dies entspricht in etwa einer Reynoldszahl basierend auf der Kanalhöhe $2h$ von $Re \approx 30000$ bzw. $Re_h \approx 24000$. Vergleichsdaten

Direkter Numerischer Simulationen (DNS) zu diesen Reynoldszahlen wurden von Miyauchi und Tanahashi (2003) bzw. von Abe et al., 2004 [1] erzeugt. Abbildung

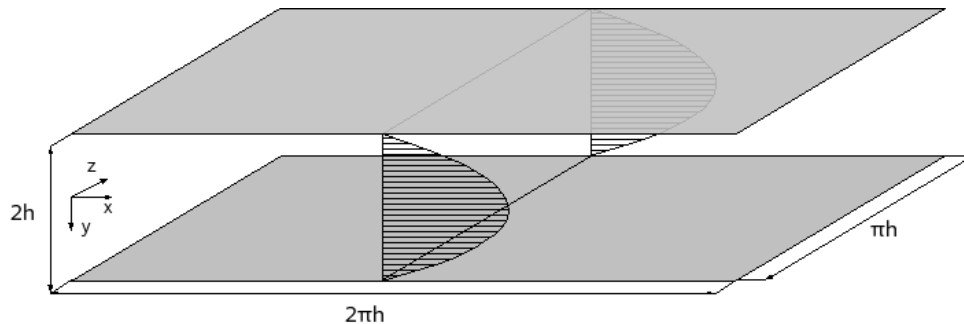


Abbildung 4.3: Geometrie der als Testkonfiguration benutzten Kanalströmung

4.3 zeigt die Geometrie der Kanalströmung. Das Rechengebiet besitzt die typischen Abmessungen $2\pi h \times 2h \times \pi h$. Sowohl in x - als auch in z -Richtung werden periodische Randbedingungen verwendet. Wände befinden sich nur in y -Richtung, so dass es sich effektiv um eine eindimensionale Strömung (y -Richtung) handelt. Mit Hinblick auf die ebenfalls zu untersuchende Wärmeübertragung wird neben der Strömung auch die Temperatur mitberechnet und beide Kanalwände mit einem geringen Wärmestrom von 100 W/m^2 beaufschlagt, um konstante Stoffwerte rechtfertigen zu können. Die Modellierung der turbulenten Wärmeströme erfolgt mittels eines Gradientenflussansatzes (2.53). Die molekulare Prandtl-Zahl liegt, festgelegt durch die Stoffwerte der Luft, bei $Pr = \nu/a \approx 0.71$.

Bei der Analyse der Anforderungen (4.1) stellte sich heraus, dass eine simultane Lösung in einem Gleichungssystem für das Modell sinnvoll ist. Diese Lösungsmethode bedeutet aber, dass an der Trennfläche ein Kontrollvolumen, das zum RANS-Gebiet gehört und als Nachbarn einen LES-Punkt hat, direkt durch diesen beeinflusst wird, denn je nach verwendetem Diskretisierungsschema, tauchen die Nachbarpunkte mehr oder minder stark in der Gleichung für den aktuellen Punkt auf. Da die LES ein instationäres Verfahren darstellt, RANS im Grunde ein zeitlich gemitteltes, stationäres Verfahren, ist es nicht klar, wie das RANS-Gebiet auf die „Anregung“ durch das LES-Gebiet reagieren wird. Aus diesem Grund wird bei der Entwicklung des Modells in zwei Schritten gearbeitet:

1. A-priori-Untersuchungen
2. Gekoppelte Berechnungen

Das Ziel der **a-priori-Untersuchungen** ist es, erste Erkenntnisse über das Verhalten des RANS-Verfahrens zu erlangen, wenn es mit instationären Werten aus der LES beaufschlagt wird. Dabei ist zu beachten, dass der Datenaustausch hier noch unidirektional, nämlich von LES zum RANS-Verfahren, erfolgt. Die Rückwirkungen des RANS-Gebietes auf die LES werden erst später, im Rahmen der **gekoppelten Berechnungen**, berücksichtigt.

4.3 A-priori-Untersuchungen

Zur Realisierung der a-priori-Untersuchungen werden zuerst instationäre LES-Daten erzeugt. Dazu wird eine LES der oben gezeigten Kanalgeometrie (Abb. 4.3) bei $Re_\tau = 800$ durchgeführt. Dabei wird bewusst eine hohe Auflösung gewählt. Zum einen, um sicher zu sein, dass die Daten möglichst korrekt sind, zum anderen aber auch, um später noch ein zusätzliches eigenes Vergleichsergebnis zu besitzen. Die gewählte Auflösung beträgt $96 \times 192 \times 96$ Gitterpunkte in x -, y - und z -Richtung, wodurch eine Gesamtanzahl von ca. 1.77 Millionen Kontrollvolumen zustande kommt. Mit einer Schubspannungsgeschwindigkeit von $u_\tau = 0.11792 \text{ m/s}$ ergeben sich die dimensionslosen Gitterabstände zu $\Delta x^+ = 52$, $0.2 < \Delta y^+ < 25$ und $\Delta z^+ = 26$. Als Modell wird das Smagorinsky-Modell (vgl. 2.4.1) mit $C_s = 0.1$ und Dämpfung verwendet ((2.106), Piomelli [52]). Berechnungen mit dem dynamischen Smagorinsky-Modell zeigen ähnliche Ergebnisse. Der angelegte Druckgradient in Strömungsrichtung (x) zur Erzeugung der geforderten Reynoldszahl beträgt $-\partial p/\partial x = 0.1728 \text{ N/m}^3$ bei einer gewählten halben Kanalhöhe von $h = 0.1 \text{ m}$. Als Fluid wird Luft mit Standard-Stoffwerten bei 293 K verwendet.

Nach der Erzeugung der instationären Daten wird im nächsten Schritt der Teil des Kanals, in dem später RANS gerechnet werden soll, aus dem Problemgebiet herausgeschnitten. Da es sich um eine symmetrische Konfiguration handelt, wird nur der untere Teil des Kanals betrachtet, so dass ein quaderförmiges Gebiet mit einer Wand auf der Unterseite entsteht (Abb. 4.4). Die Oberseite dieses herausgeschnitte-

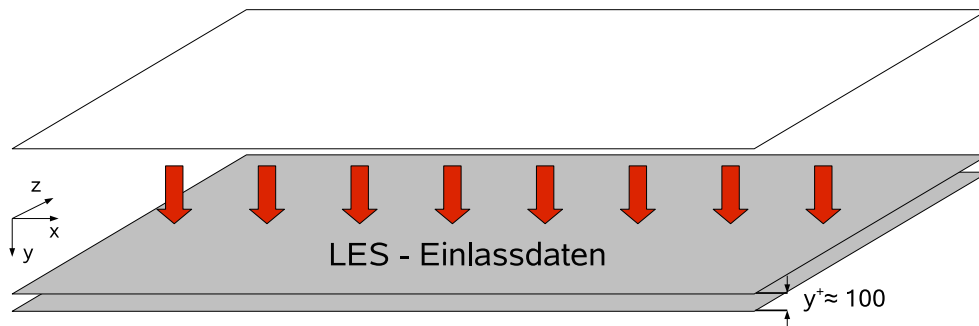


Abbildung 4.4: Skizze zu den a-priori-Untersuchungen

nen Rechtecks, die mitten im eigentlichen Rechengebiet liegt und später das Interface repräsentieren wird, wird mit einer Einlass-Randbedingung versehen. An dieser Stelle werden die bereits gewonnenen Daten aus der LES eingebracht, wobei zu beachten ist, dass die Strömung je nach Richtung sowohl in das neue Rechengebiet hinein- als auch herausströmt. Alle übrigen Randbedingungen werden gegenüber der reinen LES-Rechnung nicht verändert.

Als RANS-Modell wird das Chien- k - ε -Modell (vgl. 2.3.1.2) verwendet. Die Gitterauflösung wird in der x -, z -Ebene aufgrund des verwendeten Modells auf 24×24 reduziert. Die Punkteanzahl in y -Richtung ist vornehmlich durch die Forderung eines low-Re-Modells nach $y^+ \approx 1$ vorgegeben. Im vorliegenden Fall ergeben sich somit 20 Gitterpunkte in dieser Richtung.

Die Position des Interface bzw. die Höhe des herausgeschnittenen Rechtecks wird zunächst auf einen Abstand festgelegt, der bei der vorliegenden Strömung einem dimensionslosen Wandabstand von $y^+ \approx 100$ entspricht. Das bedeutet, dass das Interface ausreichend weit in der logarithmischen Schicht liegt. Untersuchungen von Hanjalić et al. [28] zufolge werden die Ergebnisse zunehmend schlechter, wenn man sich der Wand unter $y^+ \approx 120$ annähert. Erst bei ganz geringen Wandabständen weisen die Rechnungen wieder bessere Ergebnisse auf. Ein Annähern an die Wand wirkt jedoch dem eigentlichen Ziel eines hybriden Verfahrens entgegen.

Um die Einlassdaten bereitzustellen, werden zuerst 3000 Zeitschritte der feinen LES-Rechnung in der entsprechenden Ebene abgespeichert und auf das gröbere Gitter interpoliert. Diese Daten werden dann im Laufe der RANS-Rechnung in jedem Zeitschritt eingelesen und wie bereits erwähnt als Einlass-Randbedingung eingebracht. Dabei ist zu beachten, dass keine Mittelung, weder zeitlich noch räumlich, durchgeführt wird, wie es die eigentliche Natur der RANS-Daten erfordern würde. Dieses geschieht mit voller Absicht und soll neben dem modellierten Beitrag zur Turbulenz im Falle einer gewöhnlichen RANS-Rechnung noch einen aufgelösten hinzufügen. Als Einlassdaten müssen gemäß des verwendeten k - ε -Turbulenzmodells die drei Geschwindigkeitskomponenten u , v und w sowie die turbulente kinetische Energie k und die Dissipation ε vorgegeben werden. Die vorgegebene turbulente kinetische Energie stellt den aufgelösten Anteil dar, der mit Hilfe einer online-Mittelung aus den Reynoldsspannungen gewonnen wird ($k = \frac{\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}}{2}$), der modellierte sogenannte subgrid scale (SGS)-Anteil ist aufgrund der hohen Auflösung vernachlässigbar klein. Da im Rahmen einer LES keine direkten Informationen über die Dissipation vorhanden sind, wird die Dissipation aus der Mischungswegformulierung $\varepsilon = k^{3/2}/(\kappa y)$ abgeschätzt. Man muss sich jedoch vor Augen halten, dass die ausgetauschten Größen in den jeweiligen Gebieten unterschiedliche Bedeutungen haben. Dieser Sachverhalt ist mit Hilfe von Tabelle 4.1 dargestellt: Die in der LES berechnete Ge-

RANS	LES
\bar{u}_i	\hat{u}_i
k_{mod}	k_{res}
ε_{mod}	ε_{res}

Tabelle 4.1: Beziehung zwischen Größen im LES- und RANS-Gebiet

schwindigkeit entspricht der gefilterten Geschwindigkeit. Bei der Einspeisung in die RANS-Rechnung wird diese zur Randbedingung für die dort berechnete, in diesem Fall aber gemittelte Geschwindigkeit. Die turbulente kinetische Energie k wird in der LES direkt aus den Fluktuationen der Geschwindigkeit ermittelt, welche aus der Subtraktion von berechneter und gemittelter Geschwindigkeit resultieren. Mit der Einspeisung wird jetzt das aufgelöste k_{res} zur Randbedingung für das dortige k , welches eigentlich zu 100 Prozent modelliert ist. Genauso verhält es sich mit der Dissipation ε .

Der Effekt der instationären LES-Daten auf die RANS-Rechnung ist in Abb. 4.5 dargestellt. Auf der rechten Seite sieht man einen Kontur-Plot der Geschwindigkeit

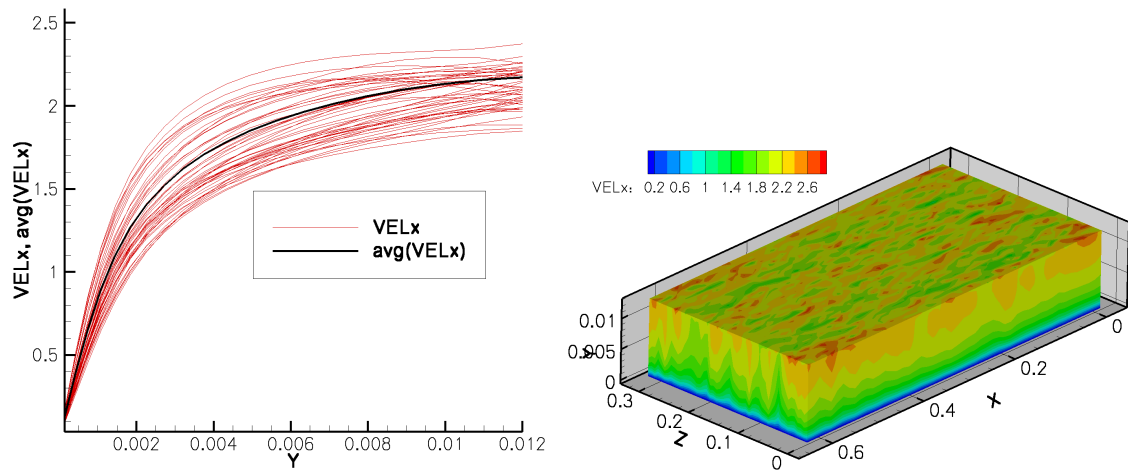


Abbildung 4.5: Effekt der instationären LES-Daten auf die RANS-Rechnung

in Strömungsrichtung. Dabei wurde die y -Achse um ca. den Faktor 10 gestreckt, um eine bessere Darstellung zu erhalten. Bei gleichen Achsenverhältnissen ähnelt das Gebiet eher einer flachen Platte (vgl. Abb. 4.4). Man erkennt, dass die Instationaritäten - hier repräsentiert durch lokale Geschwindigkeitsunterschiede - relativ weit, in diesem Fall bis ca. zur Hälfte der gezeigten Höhe, in das RANS-Gebiet eindringen. Je weiter man sich der Wand nähert, desto mehr geht die Rechnung in eine „reine“ RANS-Lösung über. Dies zeigt auch die linke Grafik der Abbildung 4.5, in der die axiale Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt über der wandnormalen Koordinate y aufgetragen ist. Im Gegensatz zu einer reinen RANS-Lösung, bei der es nur eine Kurve gäbe, existieren, bedingt durch die verschiedenen Randbedingungen der LES-Daten, viele unterschiedliche Lösungen. Zu einem anderen Zeitpunkt verlaufen diese Kurven anders, da die Randbedingungen wiederum unterschiedlich sind - die RANS-Rechnung ist stark zeitabhängig, also instationär geworden. Das bedeutet zum einen, dass ähnlich der LES und der DNS eine zusätzliche (zeitliche) Mittelung durchgeführt werden muss, um ein vergleichbares mittleres Profil zu erhalten. Zum anderen impliziert dies aber auch, dass es jetzt noch einen zusätzlichen aufgelösten Anteil an Reynoldsspannungen gibt, denn aus dem momentanen Variablenwert, z. B. der Axialgeschwindigkeit und dem oben angesprochenen Mittelwert, lässt sich immer ein Fluktuationswert berechnen, der dann durch Korrelation mit sich selbst oder einem anderen Fluktuationswert eine Spannung ergibt. Um die Größe des Unterschieds zwischen Momentan- und Mittelwert zu verdeutlichen, ist deshalb der Mittelwert der Axialgeschwindigkeit ebenfalls in Abb. 4.5 links eingetragen. Nah an der Trennfläche ist dieser Unterschied, der indirekt auch ein Maß für die Größe der Reynoldsspannungen ist, relativ groß und muss auf der Trennfläche verfahrengetreu gleich dem der feinen LES sein, mit der die Einlassdaten erzeugt wurden.

Mit anderen Worten bedeutet dies, dass zu dem in RANS vorhandenen Modellanteil (mod) der Reynoldsspannungen, welcher durch den Boussinesq-Ansatz (2.52) gegeben ist, noch ein aufgelöster Anteil (res), der wie oben beschrieben aus der Mittelung folgt, hinzuaddiert werden muss, um die gesamten (tot) Spannungen zu erhalten.

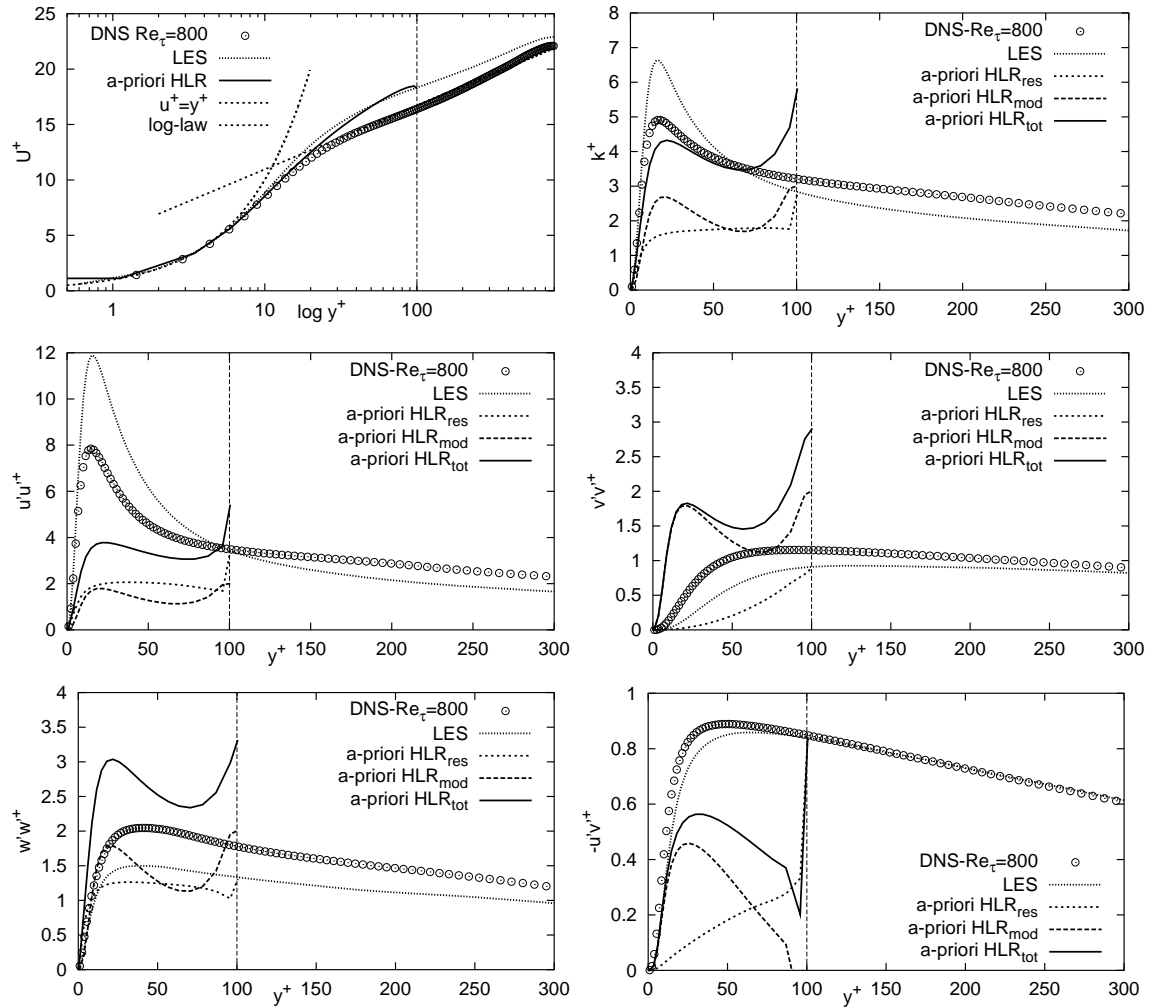


Abbildung 4.6: Ergebnisse der a-priori-Untersuchungen

Abbildung 4.6 zeigt quantitative Ergebnisse zu den a-priori-Untersuchungen. Neben dem Ergebnis der erwähnten DNS, ist noch das der feinen LES, die auch die Einstromdaten lieferte, abgebildet. Der Allgemeingültigkeit wegen, werden alle Variablen in dimensionsloser Form dargestellt. Dafür wird, wie in Kanalströmungen üblich, die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ , die kinematische Viskosität ν und halbe Kanalhöhe h verwendet ($y^+ = yu_\tau/\nu$, $u^+ = u/u_\tau$, $k^+ = k/u_\tau^2$, usw.). Die Position des Interface, bzw. der obere Rand des Rechengebietes der hybriden a-priori-Untersuchungen, ist in allen Graphen mit einem vertikalen Strich gekennzeichnet. Betrachtet man die gemittelte Axialgeschwindigkeit über der wandnormalen Koordinatenachse, für welche sich eine semi-logarithmische Darstellung eingebürgert hat, so fällt zunächst auf, dass schon die feine LES eine deutliche Abweichung von der DNS und dem ebenfalls eingetragenen logarithmischen Wandgesetz zeigt. Dies liegt hauptsächlich an der ungünstigen Verteilung der Gitterpunkte bei dieser Simulation und damit unzureichender Auflösung in z -Richtung, stellt aber für das Ziel der Untersuchungen kein Problem dar. Der Verlauf der hybriden a-priori-Methode ent-

spricht der schwarzen Linie links in Abb. 4.5. Gemittelt ergibt sich also ein korrekter Verlauf der Axialgeschwindigkeit. Der Randwert an der Trennfläche stimmt sehr gut mit dem der LES überein, eine geringe Abweichung kommt durch die Normierung mit einem leicht unterschiedlichen u_τ zustande. Oben rechts ist der Verlauf der aus der k -Gleichung berechneten turbulenten kinetischen Energie abgebildet. Wie weiter vorne schon angesprochen, werden für das hybride a-priori-Verfahren neben dem Gesamtwert (tot) auch der aufgelöste (res) und der modellierte (mod) Anteil am Gesamtwert angegeben. Mehrere wichtige Beobachtungen können mit Hilfe dieser Grafik gewonnen werden:

1. Es bestätigt sich, dass es einen aufgelösten Anteil gibt, der sogar in der gleichen Größenordnung wie der modellierte liegt. Die RANS-Rechnung ist also in der Lage, die instationären Information der LES Rechnung in gewissem Maße aufzunehmen.
2. Angefangen vom vorgegebenen Randwert der LES nimmt der aufgelöste Anteil zur Wand hin ab, wie auch schon anhand der qualitativen Kontur-Plots angenommen. Dies war zu erwarten, da die turbulente Viskosität und damit die Dämpfung im RANS-Gebiet sehr hoch ist.
3. Der modellierte Anteil ist kleiner als in einer „reinen“ RANS-Rechnung. Dies liegt wahrscheinlich daran, dass der den modellierten Spannungen zugrunde liegende Boussinesq-Ansatz eigentlich nur für Mittelwerte gilt, durch die LES-Anregung aber instationäre Felder vorliegen.
4. Die Summe der beiden Spannungen trifft den Peak nahe an der Wand sowie den unmittelbaren Verlauf danach relativ gut. Dies erscheint sehr vielversprechend für ein hybrides LES/RANS-Verfahren.
5. Am Interface führt die Addition der beiden Teilwerte zu einer starken Überhöhung. Diese Überhöhung wird durch eine Doppeltzählung der Turbulenz (aufgelöster Anteil durch LES + modellierter Anteil durch RANS) in der Nähe der Trennfläche verursacht, denn der aus der LES gelieferte k -Randwert für die RANS-Rechnung liefert schon nahezu 100 % der turbulenten kinetischen Energie. Zusätzlich dazu kommt der aufgelöste Anteil hinzu, der am Interface noch einmal diesem Wert entspricht.

Ein ähnliches Bild findet sich auch in den gezeigten einzelnen Reynoldsspannungen wieder, wobei der modellierte Anteil bei den Normalspannungen typisch für die Kanalströmung immer $2/3 k$ entspricht.

Aus den obigen Beobachtungen ergibt sich die Notwendigkeit, die modellierte Turbulenz an der Trennfläche zu vermindern, denn durch die Lösung in einem gemeinsamen Gleichungssystem lässt sich der aufgelöste Anteil, der durch die LES geliefert wird, nur schwer beeinflussen. Es muss jedoch beachtet werden, dass bisher nur eine unidirektionale Kopplung untersucht wurde, also von LES zu RANS. Bei einer bidirektionalen Kopplung wird die RANS-Rechnung mit Sicherheit Rückwirkungen auf

die LES in der Art haben, dass Fluktuationen gedämpft werden, wodurch der aufgelöste Anteil verkleinert wird. Für weitere Untersuchungen zur Verminderung des modellierten Anteils sollten demnach erste gekoppelte Berechnungen durchgeführt werden.

4.4 Gekoppelte Berechnung

Wie im vorigen Kapitel schon angesprochen, bedeutet „gekoppelte Berechnung“, dass der Informationsaustausch zwischen beiden Gebieten bidirektional erfolgt, beide Seiten sich also gegenseitig beeinflussen. Die Kopplung wird gemäß den Anforderungen und den daraus abgeleiteten Erkenntnissen (vgl. Abschnitt 4.1) in einer locker zonalen Weise realisiert (vgl. Abschnitt 1.2), so dass für die Primärgrößen, hier vorerst nur die Geschwindigkeit, zunächst keine Änderungen im Verfahren gegenüber standard RANS- oder LES-Methoden vorgenommen werden müssen. Physikalisch gesehen ist bei der Gleichungslösung ein Unterschied vorhanden, denn im RANS-Gebiet fungieren die Gleichungen als gemittelte Gleichungen, im LES-Gebiet als gefilterte. Bedingt durch die gleiche Form brauchen jedoch aktiv keine Änderungen an der Implementierung vorgenommen zu werden. Da die Kopplung über die turbulente Viskosität μ_t erfolgt, muss lediglich ein Schalter eingebaut werden, der regelt, ob die turbulente Viskosität mit Hilfe der RANS- oder der LES-Formulierung gewonnen wird. Anders ist das bei den Turbulenzgleichungen. Sowohl im LES- also auch im RANS-Gebiet können, mit der Einschränkung auf Verfahren, die die turbulente Viskosität zur Modellierung der turbulenten Reynoldsspannungen benutzen, alle möglichen, verschiedenen Modelle zum Einsatz kommen. Damit ist auch die Anzahl der zusätzlich zu lösenden Gleichungen im Allgemeinen nicht identisch. Der bereits oben erwähnte Schalter muss somit nochmals zur Festlegung des aktuellen Teilgebietes zum Einsatz kommen. Kriterien zur Wahl eines solchen **Schalters** sind

- die Darstellung einer guten Isofläche in Bezug auf die Trennung der beiden Zonen. Der optimale Fall diesbezüglich wäre eine Variable, die exakt der Wandkontur in einem definierten Abstand folgt.
- der Besitz einer großen Allgemeingültigkeit. Der Schalter sollte möglichst dimensionslos sein, damit er nicht von der Geometrie des Problems abhängig ist.
- die Wahrung der geforderten Flexibilität des Verfahrens und die Anwendbarkeit auf komplexe Geometrien.

Aufgrund der Geometrie des Kanals (Abb. 4.3) wird in einem ersten Schritt der Wandabstand y als Schalter ausgewählt. Die Verwendung des physikalischen Wandabstandes hat den Vorteil, dass im Kanal eine klare Trennung der Gebiete durch eine Gitterlinie erfolgt und keine „Verschmierung“ des Interface stattfindet, wie es z.

Gitter	Auflösung $N_x \times N_y \times N_z$	Punkte [10 ⁶]	dim. Auflösung $\Delta x^+ \times \Delta y^+ \times \Delta z^+$	Modelle / Bezeichnung
feines Gitter	96 x 128 x 144	1.7	42 x 0.23-28 x 14	LES
1. Vergrößerung	48 x 64 x 72	0.22	84 x 0.7-56 x 28	LES1,HLR1
2. Vergrößerung	24 x 64 x 36	0.055	168 x 0.7-56 x 56	LES2,HLR2,RANS2

Tabelle 4.2: Übersicht über die benutzten Kanalgrid zur Modellentwicklung

B. bei y^+ der Fall wäre, da die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ mit der aktuellen Geschwindigkeit variiert. Nach erfolgreicher Etablierung der hybriden Methode werden noch andere Schalter getestet und verwendet. Im Gegensatz zu den der a-priori-Untersuchungen, wird jedoch $Re_\tau = 640$ ausgewählt, da hierzu auch DNS-Daten der Wärmeübertragung verfügbar sind. Als RANS-Modell wird das Modell nach Chien [10] (vgl. Abschnitt 2.3.1.2, S. 30), für LES das SGS-Modell nach Smagorinsky [62] (vgl. Abschnitt 2.4.1, S. 37) benutzt. Die turbulente Viskosität wird demnach folgendermaßen bestimmt:

$$\mu_t = \begin{cases} \varrho C_\mu f_\mu k^2 / \varepsilon & : y < y_{ifce} \\ \varrho C_s^2 \Delta^2 |S| & : y > y_{ifce} \end{cases} \quad (4.1)$$

Am Interface findet in diesem ersten Schritt keinerlei spezielle Behandlung statt. Außerdem werden die jeweiligen Turbulenzgrößen zunächst unabhängig voneinander im gesamten Gebiet bestimmt. Somit gibt es kein Problem mit den jeweiligen Randbedingungen. Die Position der Trennfläche (Interface) wird in Übereinstimmung mit den a-priori-Untersuchungen auf einen Wandabstand von $y_{ifce} = 0.017$ festgelegt, was in dimensionslosen Koordinaten $y_{ifce}^+ = 100$ entspricht.

Da es das Ziel des hybriden Verfahrens ist, Gitterpunkte einzusparen, werden von Anfang an Berechnungen auf vergrößerten Gittern durchgeführt. Wie schon erwähnt, liegt der Hauptvorteil in der Möglichkeit, die beiden wandparallelen Richtungen (hier x und z) zu vergrößern. Die wandnormale Richtung muss immer noch den Anforderungen eines low-Re-Modells genügen und damit den ersten Gitterpunkt bei einem y^+ -Wert von ca. eins vorweisen. Außerdem sollten ca. 4-5 Punkte bis zu einem Wert von $y^+ \approx 11$ vorhanden sein. Für die Berechnung der feinen LES wird ein Gitter mit 96 x 128 x 144 Gitterpunkten in x -, y - und z -Richtung verwendet, welches auch in y -Richtung so fein ist, dass es für die hybriden Untersuchungen in dieser Richtung einmal vergrößert werden kann. Gegenüber der leicht höheren Reynoldszahl im Fall der a-priori-Untersuchungen wird damit eine Umverteilung einiger Gitterpunkte von der wandnormalen Richtung auf die Spannweitenrichtung durchgeführt, da sich diese als zu grob herausgestellt hatte. Tabelle 4.2 gibt einen Überblick über die im Rahmen der Modellentwicklung benutzten Gitter und deren Eigenschaften. Abbildung 4.7 zeigt die Ergebnisse einer ersten gekoppelten Berechnung auf dem zwei mal vergrößerten Gitter. Die Position der Trennfläche ist mit Hilfe des senkrechten Strichs markiert. Es ist deutlich erkennbar, dass das Profil der mittleren Geschwindigkeit einen Sprung in der Region der Trennfläche aufweist. Nach dem Sprung ist der generelle Verlauf wieder in Ordnung, liegt aber bei zu hohen Werten verglichen mit

den Referenzdaten. Dieser Sprung im Geschwindigkeitsprofil ist das größte Problem bei der Kopplung von LES und RANS und tritt prinzipiell mehr oder minder stark bei allen hybriden LES/RANS-Verfahren auf. Abbildung 4.7 unten rechts verdeutlicht das Problem anhand der Darstellung der normierten turbulenten Viskosität $\mu_t^+ = \mu_t/\mu$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für den Fall der Kanalströmung. Der Übersichtlichkeit halber wird der Verlauf in logarithmischer Form gezeigt. Während bei einer „reinen“ LES-Rechnung der Wert von μ_t^+ in der Größenordnung von eins liegt, die turbulente Viskosität also in etwa die Größe der molekularen besitzt, steigt der Wert im Falle einer „reinen“ RANS-Rechnung leicht bis auf 80 oder 100 an. Das liegt daran, dass bei einer RANS-Rechnung die gesamte Turbulenz der Strömung mit diesem Term erfasst wird. Im Falle der LES wird der größte Teil der Turbulenz aufgelöst, also direkt erfasst. Modelliert wird nur ein kleiner Bruchteil. Das Problem entsteht nun dadurch, dass das Umschalten von RANS auf LES im Geschwindigkeitsfeld nicht so schnell erfolgt, wie durch den Schalter bei der turbulenten Viskosität. Durch den hohen Wert von μ_t im RANS-Gebiet werden gemäß der Idee von RANS-Rechnungen die Geschwindigkeitsfluktuationen gedämpft. Überschreitet man nun das Interface in Richtung LES, dann verschwindet zwar die starke Dämpfung (durch Umschalten auf μ_{SGS}), aber für das erste LES Kontrollvolumen nach der Trennfläche bleibt trotzdem immer noch der RANS-Punkt als Nachbar vorhanden. Über das Diskretisierungsschema geht dieser Wert mit in die Berechnung des aktuellen ein usw. . Dadurch bildet sich eine Art **Übergangszone**, in der sich die Strömung sozusagen „erholt“ und Geschwindigkeitsfluktuationen nach und nach entstehen. Dies ist in Abb. 4.7 anhand der Verläufe der aufgelösten Anteile der Spannungen ($HLR2_{res}$) gut zu erkennen. Die Komponente der Spannung in Strömungsrichtung ($\overline{u'u'}$) erholt sich sehr schnell und schießt dann sogar über das Level der feinen LES hinaus. Dagegen langsam erholen sich die Fluktuationen in den anderen beiden Richtungen senkrecht dazu, $\overline{v'v'}$ und $\overline{w'w'}$, was dadurch hervorgerufen wird, dass die mittlere Geschwindigkeit in dieser Richtung nahezu gleich Null ist. Diese Spannungssituation - zu großes $\overline{u'u'}$, dafür aber zu kleine Normalspannungen in den anderen beiden Richtungen - ist jedoch typisch für LES auf groben Gittern und wird durch unzureichendes „pressure scrambling“ verursacht. Damit ist gemeint, dass die Umverteilung der Spannungen durch den Druck (Umverteilungsterm ϕ_{ij} bei Reynoldsspannungsmodellen) nicht ausreichend erfasst wird. Bedingt wird dies durch die Komplexität dieses Terms, welcher den fluktuierenden Druck mit dem Gradienten der fluktuierenden Geschwindigkeiten korreliert.

Innerhalb der Übergangszone, die auch „buffer layer“ genannt wird und sich über ca. 2-3 Gitterpunkte erstrecken kann, ist die Strömung weder RANS noch LES und passt noch nicht zur modellierten Viskosität. Betrachtet man die gesamte Turbulenz, also die Summe aus modellierter und aufgelöster, dann ist diese innerhalb der Übergangszone zu klein, denn zur vorhandenen SGS-Viskosität sind nicht ausreichend starke Fluktuationen vorhanden. Dies äußert sich im mittleren Geschwindigkeitsprofil mit einem höheren Wert, so dass ein Sprung nach oben stattfindet. Als repräsentative Spannung betrachtet man am besten die Schubspannung $\overline{u'v'}$, denn deren modellierter Anteil wird nicht durch die turbulente kinetische Energie aus der k -Gleichung beeinflusst (2.52, S. 28). Man erkennt deutlich den viel zu niedrigen Wert der Ge-

samtspannung auf der LES-Seite des Interface. Verstärkt wird dies noch zusätzlich dadurch, dass der modellierte Anteil vom vorletzten zum letzten Punkt hin auf dieser Seite abnimmt. Die Ursache dafür ist zum einen in einer Abnahme der Scherrate $|S|$ durch Dämpfung der Fluktuationen zu sehen, was dadurch ersichtlich wird, dass auch die turbulenten Viskosität im LES-Gebiet, welche gemäß (4.1) bestimmt wird, abnimmt.

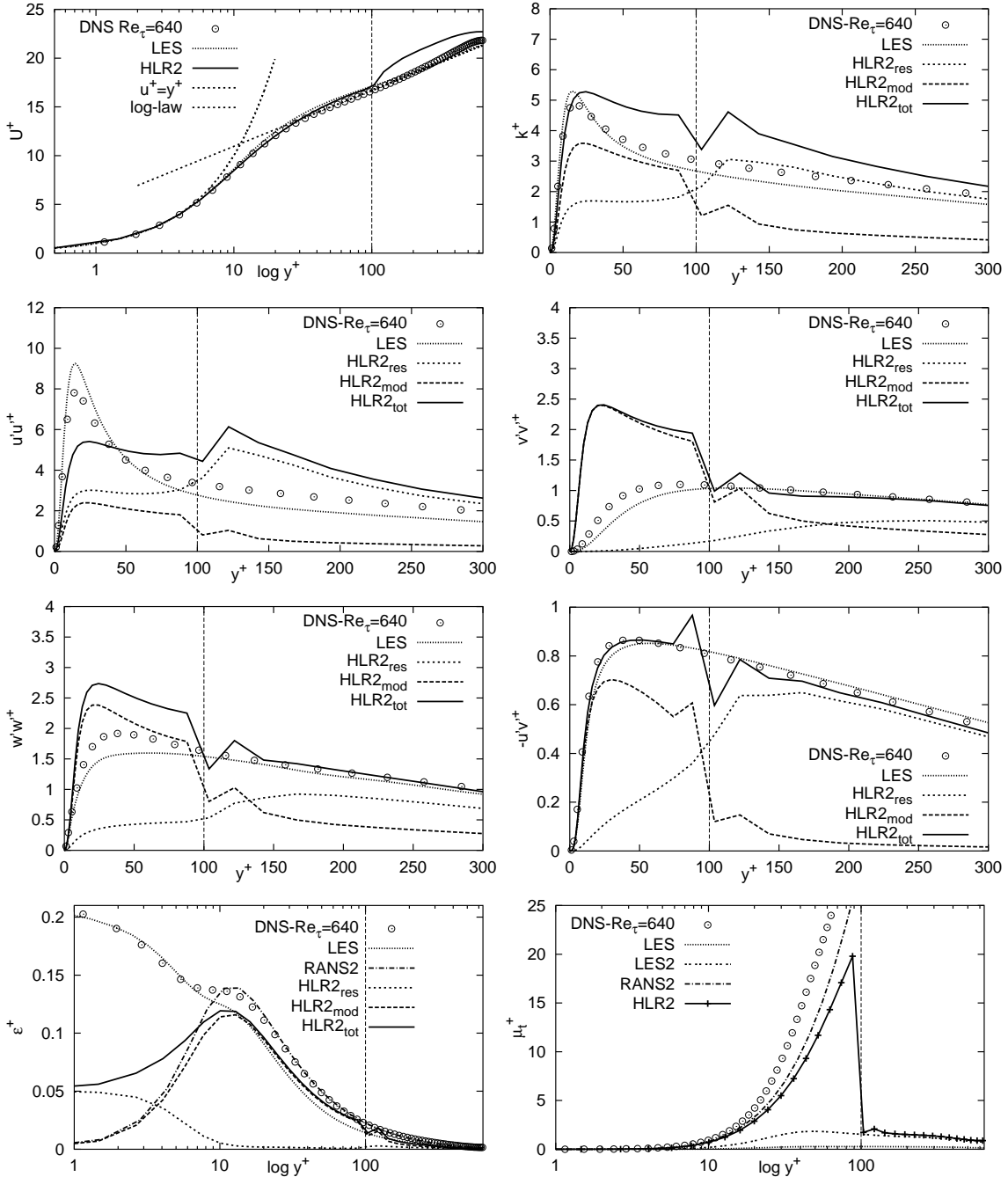


Abbildung 4.7: Ergebnisse der ersten gekoppelten hybriden LES/RANS-Berechnungen (HLR) ohne spezielle Behandlung am Interface auf dem Gitter 24 x 64 x 36

Zum anderen müssen aber auch die einzelnen Terme im Verzerrungstensor S_{ij} an sich durch Dämpfung der Fluktuationen abnehmen bzw. umgekehrt gesehen auf der RANS-Seite durch Entstehung von Fluktuationen zunehmen, denn obwohl sich die modellierte Viskosität, die hier durch k und ε bestimmt wird, nur geringfügig ändert - ja sogar abnimmt -, nimmt der modellierte Anteil mit zunehmenden Fluktuationen stark zu ($\overline{u'v'_{mod}}$). Dass sich die turbulente Viskosität auf RANS-Seite geringfügig gegenüber der „reinen“ RANS-Rechnung verkleinert, ist eine Reaktion der k - und ε -Gleichung auf die langsam anwachsenden Fluktuationen. Sie reagieren also invers zum Verzerrungstensor. Dieses Verhalten ist auch in den einzelnen Diagrammen der Abb. 4.7 zu erkennen ($k^+ = k/u_\tau^2$ und $\varepsilon^+ = \varepsilon\nu/u_\tau^4$).

Was also eigentlich verglichen werden muss, sind die Gesamtspannungen auf beiden Seiten der Trennfläche, welche sich, wie bereits erwähnt, aus den modellierten und aufgelösten Spannungen zusammensetzen:

$$\underbrace{\tau_{res}^{LES} + \tau_{mod}^{LES}}_{\tau_{tot}^{LES}} = \underbrace{\tau_{res}^{RANS} + \tau_{mod}^{RANS}}_{\tau_{tot}^{RANS}} \quad (4.2)$$

bzw.

$$\overline{\rho(\hat{U}_i - \hat{U}_i)(\hat{U}_j - \hat{U}_j)} - 2\rho\nu_{SGS}\hat{S}_{ij} = \overline{\rho(\bar{U}_i - \bar{U}_i)(\bar{U}_j - \bar{U}_j)} - 2\rho\nu_t\bar{S}_{ij}$$

Wichtig an dieser Stelle ist der Unterschied zwischen räumlicher Filterung „ $\hat{}$ “ und zeitlicher Mittelung „ $\bar{}$ “, welchen der Computer aufgrund der impliziten Anwendung der Filterung bzw. Mittelung allerdings nicht „erkennen“ kann. Gemäß den mathematischen Regeln der zeitlichen Mittelung muss der erste Term auf der rechten Seite eigentlich gleich Null sein. Bei einer klassischen RANS-Rechnung ist er das, aber bei der hybriden Methode mit der oben beschriebenen Kopplung stellt der erste Strich über der Variablen keine zeitliche Mittelung im ursprünglichen Sinne dar, denn wie bereits gesehen, nimmt das RANS-Gebiet die Fluktuationen des LES-Gebietes an. Gleichermäßen wird auch die Filterung auf der LES-Seite beeinträchtigt, so dass beide Operatoren nicht mehr strikt zu trennen sind. Beim Durchlaufen der RANS- und LES-Zonen geht die zeitliche Mittelung relativ kontinuierlich in eine räumliche Filterung über.

Will man den Sprung im mittleren U -Profil nun vermindern oder beseitigen, müssen die Gesamtspannungen auf beiden Seiten gleich groß sein und stetig in einander übergehen. Wie in Abb. 4.7 zu erkennen ist, erfolgt dies nicht automatisch. Bedingt durch die Doppeltzählung der Turbulenz auf RANS- und der Dämpfung der Turbulenz auf LES-Seite entsteht gezwungenermaßen eine zum Teil nicht unerhebliche Diskrepanz. Um also wieder Gleichheit herzustellen, müssen entweder der aufgelöste, der modellierte oder auch beide Anteile in Kombination angepasst werden. Dafür werden zwei unterschiedliche Methoden verwendet:

- Die Manipulation des modellierten Anteils erfolgt mit Hilfe des **blending**.
- Der aufgelöste Anteil wird mittels **forcing** beeinflusst.

4.4.1 Eine analytische Betrachtung

Das Hauptproblem, das bei der Kopplung der beiden Verfahren auftritt, ist die rasche Verkleinerung von μ_t um ca. eine Größenordnung und der damit verbundene Knick im Geschwindigkeitsprofil (vgl. Abb. 4.7). Bevor in den nachfolgenden Kapiteln auf die Möglichkeiten zu dessen Behebung eingegangen wird, soll das Problem zunächst anhand einer analytischen Betrachtung verdeutlicht werden. Dazu wird die Situation des hybriden Modells auf eine Schichtenströmung in einem Kanal übertragen. Da es sich um ein symmetrisches Problem handelt, wird im Folgenden nur die untere Hälfte des Kanals betrachtet. Somit gibt es analog zur Problemstellung der hybriden Verfahren insgesamt zwei Schichten, eine RANS-Schicht von der Wand bis zur Trennfläche bei h_R und eine LES-Schicht von der Trennfläche bis zur Symmetrieebene. Der turbulente Charakter der Strömung kommt, wie auch später im Programm, durch eine Wirbelzähigkeit oder auch turbulente Viskosität μ_t in Verbindung mit der Boussinesq-Approximation zum Ausdruck. Der Unterschied zwischen den beiden Schichten besteht nun in der Größe der jeweiligen Viskositäten, μ_R für RANS und μ_L für LES. Mit den Annahmen der Schichtenströmungen ($U = f(y)$ und $V = W = 0$) vereinfachen sich die Navier-Stokes'schen Gleichungen wesentlich:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.3)$$

Daraus ergibt sich die analytische Lösung des Geschwindigkeitsfeldes zu:

$$u_R = \frac{-K}{2\mu_R} y^2 + \frac{Kh}{\mu_R} y \quad : 0 < y \leq h_R \quad (4.4)$$

$$u_L = \frac{-K}{2\mu_L} y^2 + \frac{Kh}{\mu_L} y + \frac{Kh_R^2(\mu_L - \mu_R)}{2\mu_R\mu_L} \left[2\frac{h}{h_R} - 1 \right] \quad : h_R < y \leq h \quad (4.5)$$

wobei $K = -\frac{\partial p}{\partial x}$ der die Strömung treibende konstante Druckgradient ist. Unbekannt sind bis jetzt noch die Wirbelzähigkeiten der beiden Gebiete. Um möglichst realistische Profile zu erhalten, müsste die turbulente Viskosität im RANS-Gebiet als Funktion von y betrachtet werden und sich von Null an der Wand bis zu einem Endwert in der Kanalmitte nähern. Allerdings wäre dann die Herleitung des Geschwindigkeitsprofils wesentlich komplizierter, so dass der Vorteil der Ausführungen dieses Kapitels, anhand einfacher Gleichungen die Auswirkungen der Viskositätsänderungen zu sehen, hinfällig wäre. Aus diesem Grund wird ein konstanter Wert für μ_t^R angenommen. Durch diese weitere Vereinfachung wird der grundlegende Mechanismus, der hier betrachtet wird aber nicht geändert. Im LES-Gebiet, welches erst ab der Trennfläche startet, wird mit einem konstanten Verlauf kein großer Fehler gemacht. In Übereinstimmung mit reinen LES-Rechnungen wird als Wert $\mu_t^L/\mu \approx 2$ gewählt. Die Viskositäten der einzelnen Gebiete folgen dann aus

$$\mu_R = \mu + \mu_t^R \quad \text{und} \quad \mu_L = \mu + \mu_t^L. \quad (4.6)$$

Die Wandschubspannung und damit auch die Schubspannungsgeschwindigkeit lassen sich aus (4.4) direkt bestimmen:

$$\tau_w = \mu_R \left. \frac{du_R}{dy} \right|_{y=0} = Kh \quad (4.7)$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\varrho}} = \sqrt{\frac{Kh}{\varrho}} \quad (4.8)$$

Sie sind also nicht abhängig von der Lage der Trennfläche, sondern ergeben sich direkt aus der halben Kanalhöhe und dem Druckgradienten.

Mit Hilfe der Boussinesq-Approximation (2.62) lassen sich auch die turbulenten Scheinspannungen oder **Reynoldsspannungen** bestimmen:

$$-\overline{uv}^+ = -\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2} = (1 - y/h) \frac{\mu_t}{\mu_t + \mu}, \quad \overline{uw}^+ = \overline{vw}^+ = 0 \quad (4.9)$$

$$\overline{uu}^+ = \overline{vv}^+ = \overline{ww}^+ = \frac{2}{3} \frac{k}{u_\tau^2} = \frac{2}{3} \frac{\rho k}{Kh} \quad (4.10)$$

Abbildung 4.8 zeigt das Ergebnis der analytischen Betrachtung für eine Schichten-

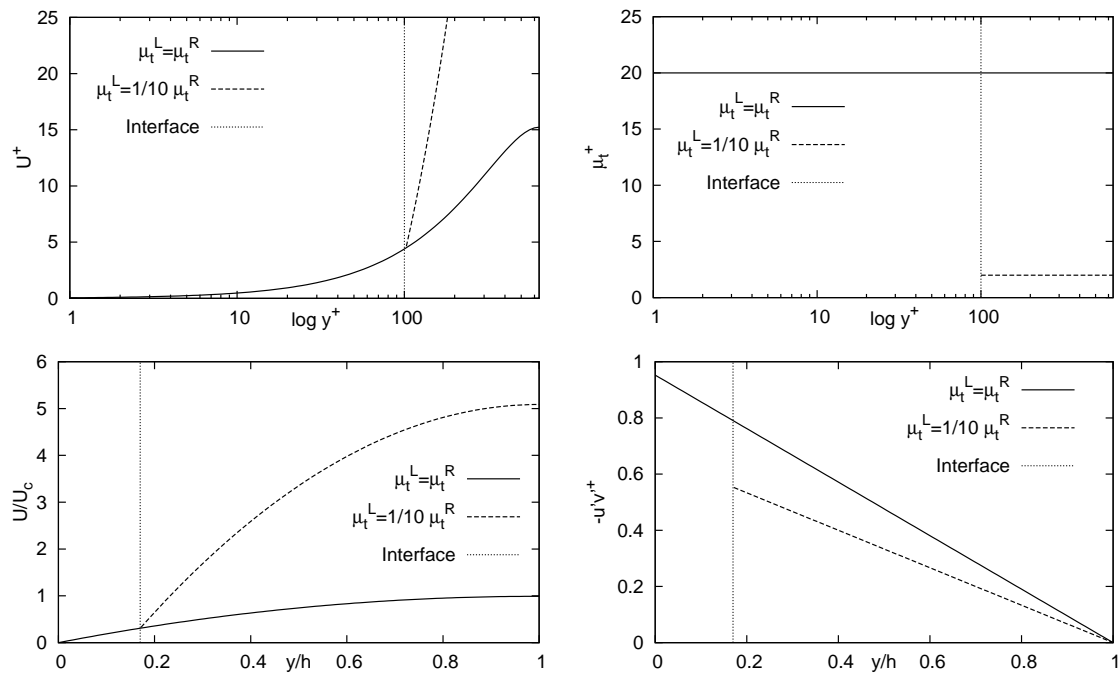


Abbildung 4.8: Ergebnis der analytischen Betrachtung für die Geschwindigkeit U und die Scheinspannung $\overline{u'v'}$

strömung, die in ihrer Konfiguration der ersten gekoppelten Rechnung entspricht ($h = 0.1\text{ m}$). Die Trennfläche wird folglich bei $y^+ = 100$ bzw. $h_R \approx 0.017\text{ m}$ festgesetzt. Die Größe der turbulenten Viskosität im RANS-Gebiet wird so gewählt, dass der Viskositätssprung ebenfalls vergleichbar ist, womit sich ein Faktor von ca. zehn und damit $\mu_t^R/\mu \approx 20$ ergibt. Anhand der beiden rechten Bilder erkennt man deutlich die Auswirkungen eines Viskositätssprunges über das Interface. Das Geschwindigkeitsprofil zeigt einen deutlichen Knick, welcher bei gleichbleibender Viskosität

nicht auftritt. Dies wird deutlich, wenn man sich die Steigung, also die Ableitung des Profils unterhalb und oberhalb der Trennfläche berechnet:

$$\left. \frac{du_R}{dy} \right|_{y=h_R} = \frac{Kh_L}{\mu_R} \quad \text{bzw.} \quad \left. \frac{du_L}{dy} \right|_{y=h_R} = \frac{Kh_L}{\mu_L} \quad (4.11)$$

Ein kleinerer Wert von μ_L resultiert direkt in einer größeren Steigung. Im Rahmen des hybriden Verfahrens (vgl. Abb. 4.7) entfernt sich die gestrichelte Kurve im weiteren Verlauf nicht so weit von der Referenzlinie wie in der aktuellen Abbildung, sondern stellt sich nach kurzer Distanz wieder auf die richtige Steigung ein. Dafür kann nur der aufgelöste Anteil der Spannungen verantwortlich sein, der sich nach Wegfall der starken Dämpfung vergrößert und quasi einer Erhöhung von μ_t^L im analytischen Modell entspricht. Beim Schubspannungsverlauf in Abb. 4.7 lässt sich ebenfalls eine Parallele zwischen der Berechnung und dem analytischen Modell erkennen. Man sieht gut den niedrigeren Wert hinter der Trennfläche, auf den $\overline{u'v'}$ auch bei der gekoppelten Rechnung zurückfällt. Der dafür entscheidende Term $\mu_t/(\mu_t + \mu)$ lässt sich aus (4.9) ablesen, so dass man den Unterschied der turbulenten Scherspannung für das Beispiel direkt aus dem Viskositätssprung bestimmen kann:

$$\frac{\overline{uv}^{+,L}}{\overline{uv}^{+,R}} = \frac{\mu_t^L}{\mu_t^L + \mu} / \frac{\mu_t^R}{\mu_t^R + \mu} = \frac{1 + \mu/\mu_R}{1 + \mu/\mu_L} = \frac{1 + 1/20}{1 + 1/2} = 0.7 \quad (4.12)$$

Aus den gleichen Gründen wie bei der gemittelten Geschwindigkeit pendelt sich die Kurve bei der gekoppelten Berechnung direkt wieder auf den richtigen Verlauf ein. Da die Spannung nach Boussinesq mit der Ableitung der Geschwindigkeit verknüpft ist, bleibt im Gegensatz zur Geschwindigkeit allerdings keine konstante Abweichung mehr bestehen. Das reale Verhalten der Schubspannung, nah an der Wand zu Null zu werden, welches durch das Verschwinden der Reynoldsspannungen (bzw. der turbulenten Viskosität) verursacht wird, kann mit diesem vereinfachten Modell generell nicht wiedergegeben werden, ist aber für die gemachten Beobachtungen nicht maßgebend.

4.4.2 Blending

Der einfachste Weg, eine annähernde Gleichheit der totalen Spannungen zu gewährleisten, liegt darin, einen kontinuierlichen Übergang der modellierten Spannungen am Interface zu erzeugen.

$$\mu_{t,ifce}^{RANS} = \mu_{t,ifce}^{LES} \quad (4.13)$$

Durch diesen Ansatz, der schon von Temmerman et. al [66] verwendet wurde, werden auf beiden Seiten der Trennfläche in gleichem Maße Fluktuationen gedämpft. Folglich müssen auch die aufgelösten Anteile auf beiden Seiten gleich sein. Ein geringer Unterschied in den Geschwindigkeitswerten rechts und links des Interface kann trotzdem dadurch entstehen, dass in die Berechnung der Kontrollvolumenwerte auch die Nachbarpunkte mit eingehen. Aufgrund des geforderten kontinuierlichen Übergangs sind die Werte der Nachbarpunkte jedoch nicht allzu verschieden und damit

ist dieser Unterschied klein. Dies gilt aber nur bei einer ausreichend feinen Auflösung in dieser Richtung, ansonsten können auch im Fall der geforderten Gleichheit der modellierten Viskositäten am Interface größere Sprünge von einem Nachbarn zum nächsten auftreten. Ist das Geschwindigkeitsfeld rechts und links der Trennfläche vergleichbar, dann muss auch der Verzerrungstensor S_{ij} annähernd gleich sein ($\hat{S}_{ij} \approx \bar{S}_{ij}$), woraus mit (4.2) die Gleichheit der totalen Spannungen folgt. Die Aufgabe des blending ist es nun, den oben angesprochenen kontinuierlichen Übergang zu gewährleisten. Ausgangspunkt dafür sind die beiden unterschiedlichen Verläufe der turbulenten Viskosität im RANS- bzw. LES-Gebiet (Abb. 4.9). Im optimalen

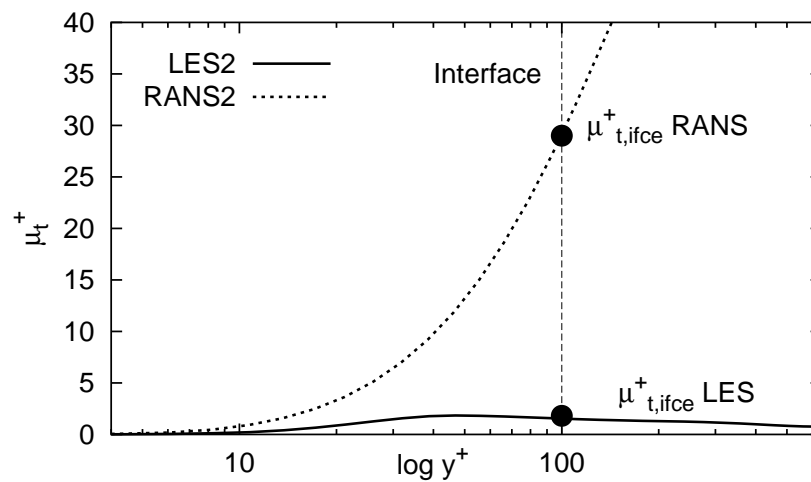


Abbildung 4.9: Skizze zur Idee des blending

Fall würde die blending-Funktion den Verlauf der Viskosität in der Übergangszone so steuern, dass er sich im Verhältnis zur oben angesprochenen „Erholung“ der Strömung bzw. der Fluktuationen genau so ändert, dass die turbulente Viskosität immer zur Strömung passt. Da diese „Erholung“ stark von der jeweiligen Strömungssituation abhängt, ist es unmöglich, dies mit einer einzigen Funktion zu erreichen. Für ein bestimmtes Strömungsproblem sollte es theoretisch immer möglich sein, eine blending-Funktion zu finden, die einen sehr guten Verlauf der Primärgrößen erzeugt. Im Hinblick auf die sinnvolle praktische Anwendung des Verfahrens ist es jedoch von vorrangiger Bedeutung, eine möglichst allgemeingültige Funktion zu finden, die in allen Strömungskonfigurationen zum Einsatz kommen kann.

Die Manipulation des modellierten Teils kann grundsätzlich auf beiden Seiten des Interface, d.h. sowohl auf RANS- als auch auf LES-Seite oder auch auf beiden Seiten, erfolgen, wodurch sich eine Vielzahl an möglichen Kombinationen ergibt. Bisherige Arbeiten, darunter vor allem [67], beschränken sich allerdings auf die RANS-Seite. Zur Veränderung des Modellanteils eignen sich am besten die jeweiligen Modellkonstanten, die zur Kalibrierung der Modelle benutzt werden. Im Falle der Wirbelviskositätsmodelle ist dies im Allgemeinen C_μ . Mit (4.13) ist eine Gleichung gegeben, aus der sich der nötige Interface-Wert der jeweiligen Konstante bestimmen lässt, um gerade die Bedingung der Gleichheit der turbulenten Viskosität zu erfüllen. Geht man

beispielhaft von einer Kopplung eines k - ε -Modells mit dem Smagorinsky-Modell aus, so ergibt sich aus (4.13):

$$\rho C_\mu f_\mu k^2 / \varepsilon|_{ifce} = \rho (C_s \Delta)^2 |S| |_{ifce} \quad (4.14)$$

Daraus folgt für ein blending auf RANS-Seite

$$C_{\mu,ifce} = \frac{\mu_{t,ifce}^{LES} \varepsilon_{ifce}}{\rho f_{\mu,ifce} k_{ifce}^2}. \quad (4.15)$$

Da, wie oben angesprochen, der Übergang kontinuierlich sein soll, muss jetzt noch eine blending-Funktion eingeführt werden, die den „normalen“ Wert der Konstanten auf den Wert an der Trennfläche überführt. Die Verlauf dieser Funktion ist sehr empirisch und hat einen nicht unerheblichen Einfluss auf das Ergebnis (vgl. Abb. 4.11). Beispiele für solche Funktionen (Standardwert $C_\mu = 0.09$) sind:

- $C_\mu = 0.09 + (C_{\mu,int} - 0.09) \left(\frac{y^+}{y_{int}^+} \right)$ lineare Funktion
- $C_\mu = 0.09 + (C_{\mu,int} - 0.09) \left(\frac{y^+}{y_{int}^+} \right)^n$ allgemeine Potenz-Funktion
- $C_\mu = 0.09 + (C_{\mu,int} - 0.09) \frac{1 - e^{-y^+/y_{int}^+}}{1 - e^{-1}}$ exponentieller Verlauf

Der Komplexität der Funktion sind theoretisch keine Grenzen gesetzt, so dass auch abschnittsweise zusammengesetzte Funktionen wie z.B. diese Funktion nach [28] möglich sind.

$$C_\mu = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{15}{40 - y^+} \left(0.09 + (C_{\mu,int} - 0.09) \left(\frac{y^+}{y_{int}^+} \right) \right) & \text{if } y^+ < 25 \\ 0.09 + (C_{\mu,int} - 0.09) \left(\frac{y^+}{y_{int}^+} \right) & \text{if } y^+ > 25 \end{array} \right\}$$

Die oben beschriebene Situation sowie der qualitative Verlauf einiger blending-Funktionen für die RANS-Seite sind in Abb. 4.10 dargestellt. Passend dazu zeigt Abb. 4.11 vergleichend die zu den blending-Funktionen passenden Ergebnisse. Oben rechts ist entsprechend Abb. 4.9 der Verlauf der turbulenten Viskosität gezeigt. Gegenüber der sprunghaften Änderung ohne blending sind die mehr oder minder kontinuierlichen Verläufe der „geblendeten“ Rechnung gut zu erkennen. Die Rechnungen mit linearem bzw. exponentiellem blending erzeugen annähernd einen kontinuierlichen Übergang in den totalen Spannungen, welche hier wiederum durch k_{tot}^+ und $\overline{u'v'}_{tot}$ repräsentiert werden. Dies resultiert, wie vermutet, in einer Verminderung des Knicks im mittleren Profil der Geschwindigkeit. Bei der Rechnung mit dem Exponenten $n = 3$, bei welcher der Wert von C_μ länger auf dem Standard-Wert von 0.09 gehalten wird und dann zum Interface hin steiler abfällt als bei den beiden erstgenannten blending-Funktionen, ist die Reduktion der Sprünge im mittleren Geschwindigkeits- und Spannungsprofil gegenüber der Rechnung ohne blending

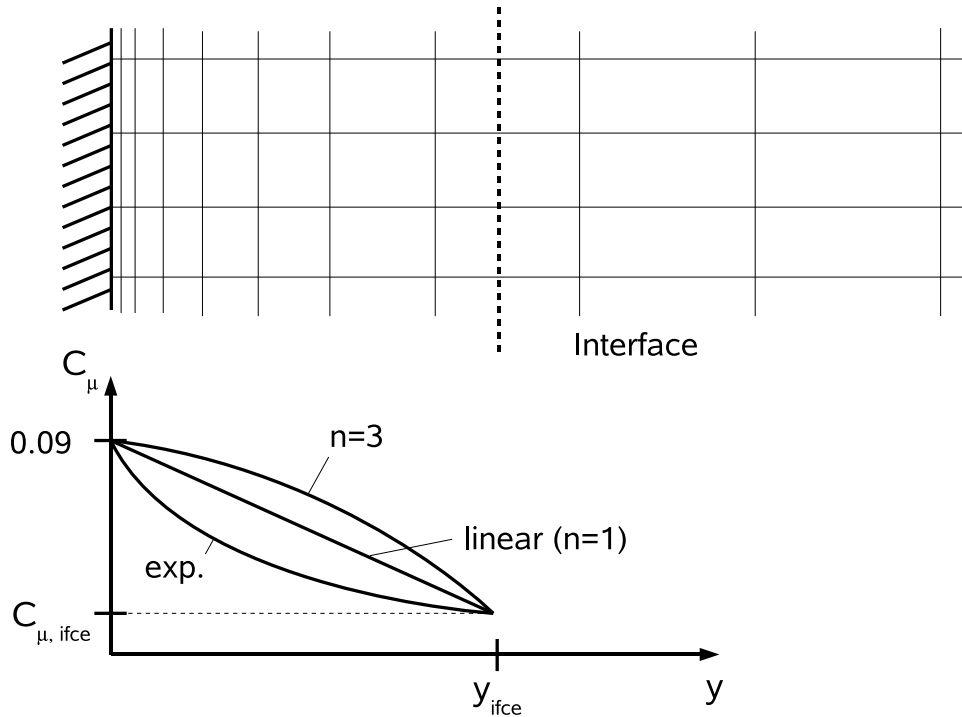


Abbildung 4.10: Verlauf der verschiedenen Funktionen im Fall des blending auf RANS-Seite (C_μ -blending)

relativ gering. Der Grund dafür liegt in der zu hybriden LES/RANS-Rechnungen passenden groben Gitterauflösung. Auf diesen Punkt wurde schon zu Anfang des Abschnitts hingewiesen. Wenn man sich jeweils die beiden Werte der turbulenten Viskosität μ_t rechts und links der Trennfläche anschaut, wird dieses Problem sichtbar. Durch den steilen Abfall zum Interface hin ist der letzte Wert der turbulenten Viskosität auf der RANS-Seite bei $n = 3$ noch relativ groß gegenüber dem ersten Wert auf LES-Seite. Je stärker das blending ist, desto geringer wird dieser Unterschied und damit auch der Knick. Es ist mit Hilfe des blending also möglich, den Knick zu vermindern. Allerdings geschieht dies auf Kosten der Gesamtlösung, denn durch die starke Reduzierung der turbulenten Viskosität weicht die Lösung im RANS-Teilgebiet schon relativ früh von ihrem sehr guten Verlauf ohne blending ab. Das sich daran anschließende LES-Gebiet „startet“ dann sozusagen von einer schlechten Lösung, so dass der abgebildete Verlauf zustande kommt. Auch das generelle Level der turbulenten kinetischen Energie liegt bei den Rechnungen mit stärkerem blending (linear und exponentiell) höher als im Fall der Simulation ohne blending. Das liegt daran, dass mit Verminderung der turbulenten Viskosität der aufgelöste Anteil stärker zunimmt, als der modellierte abnimmt. Es stellt sich eine für grobe LES-Rechnungen typische Überbewertung von k ein.

Eine Idee, dieses Problem zu überwinden, ist ein blending auf LES-Seite. Damit bliebe die RANS-Seite unangetastet und somit auch der gute Verlauf in diesem Gebiet erhalten. Zum Blenden können ähnlich dem RANS-blending die Modellparameter

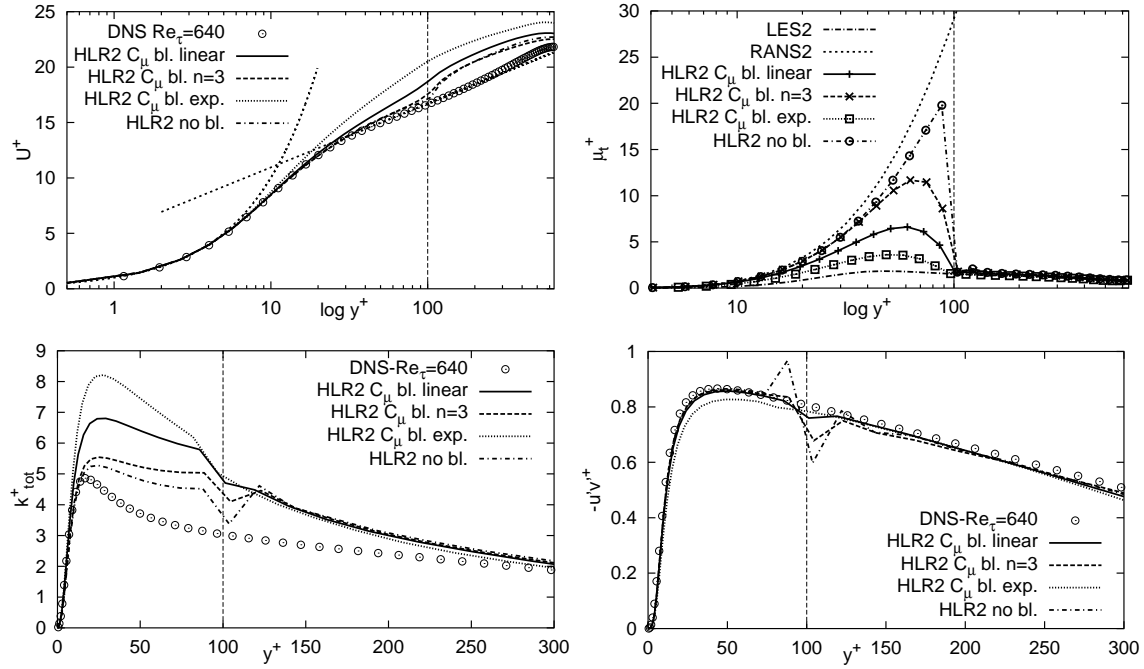


Abbildung 4.11: Vergleich der Ergebnisse verschiedener blending-Funktionen auf RANS-Seite auf dem Gitter 24 x 64 x 36

verwendet werden. Im Fall des Smagorinsky-Modells ist das die Konstante C_s . Analog (4.15) kann damit aus (4.13) folgende Formulierung für den Wert von C_s am Interface gewonnen werden.

$$C_{s,ifce}^2 = \frac{\mu_{t,ifce}^{RANS}}{\rho \Delta_{ifce}^2 |S|_{ifce}}. \quad (4.16)$$

Passende Übergangsfunktionen wiederum verschiedenster Arten können analog dem RANS-blending aufgestellt werden. Weiterhin ist es wie zu Anfang des Abschnitts bereits angesprochen auch möglich, eine Kombination der beiden blending-Verfahren (C_μ/C_s -blending) zu erstellen. Beispielhafte Ergebnisse von Simulationen mit solchen blending-Funktionen sind in Abb. 4.12 gezeigt. Zu sehen sind die Verläufe der turbulenten Viskosität, dem daraus resultierenden mittleren Geschwindigkeitsprofil sowie der turbulenten kinetischen Energie und der Schubspannung für ein blending auf RANS-Seite, auf LES-Seite und eine Kombination der beiden. Zur Erzeugung des stetigen Übergangs wurde dabei immer eine lineare Funktion verwendet. Der Vollständigkeit halber ist zusätzlich noch der Verlauf der Rechnung ohne Behandlung am Interface (Abb. 4.7) eingetragen. Beim C_s blending, bei welchem der RANS-Teil unangetastet bleibt, verläuft der Übergang der totalen Spannungen stark unste-tig, der Sprung ist sogar größer als im Fall ohne blending. Dies liegt daran, dass durch die erhöhte Viskosität im LES-Gebiet die „Erholung“ der Strömung verzögert wird, wodurch der aufgelöste Anteil stärker abgenommen, als der modellierte zuge-nommen hat. Der gewünschte Effekt einer Angleichung der totalen Spannungen auf beiden Seiten durch Erhöhung des Modellanteils der LES-Seite bleibt also aus. Dies

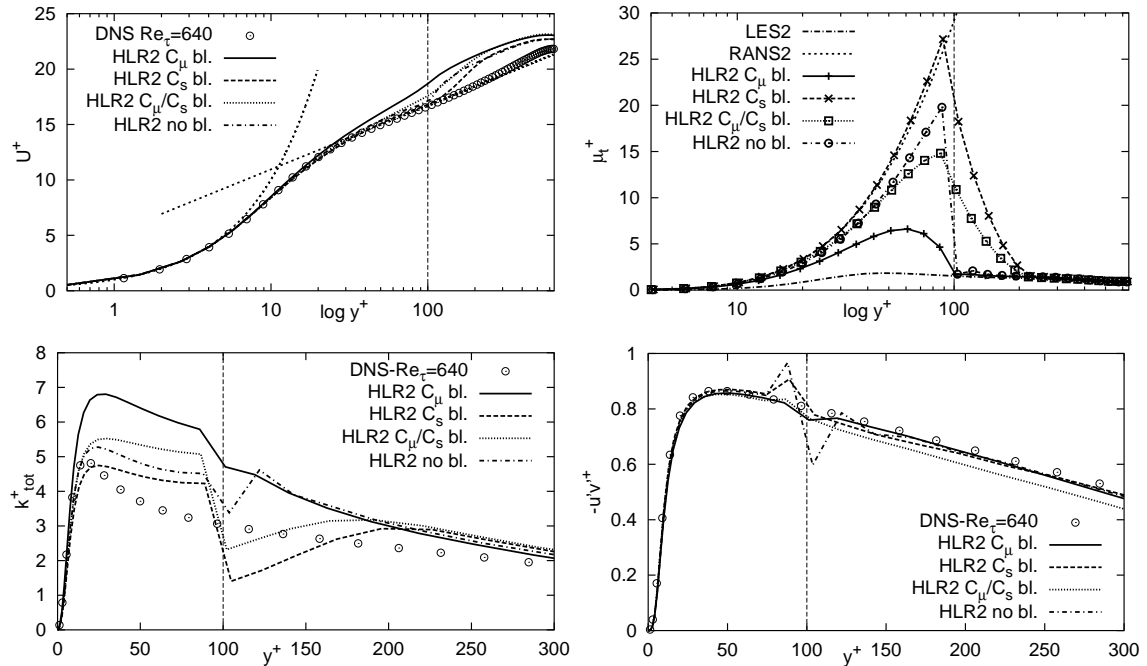


Abbildung 4.12: Vergleich von C_μ -, C_s -, C_μ/C_s -blending mit dem Ergebnis ohne blending auf dem Gitter 24 x 64 x 36

steht aber im Widerspruch zu dem am Anfang des Kapitels beschriebenen Weg zur Gleichsetzung der totalen Spannungen, denn gemäß diesem hätten auch beim LES-blending die totalen Spannungen kontinuierlich sein müssen. Die Ursache in dieser scheinbaren Unstimmigkeit liegt wiederum in der Gitterauflösung versteckt. Wenn man sich die Verläufe der turbulenten Viskosität (Abb. 4.12 oben rechts) genauer anschaut, fällt die ungenaue Erfüllung der Gleichung (4.13) auf. Bedingt durch die endliche und hier zusätzlich noch grobe Auflösung liegt der letzte Punkt auf der RANS-Seite und auch der erste Punkt auf LES-Seite nicht genau auf dem Interface, sondern je nach Zellengröße relativ weit davon entfernt. Daraus folgt mit den gezeigten blending-Funktionen an diesen Punkten zwangsläufig nicht exakt der gewünschte Interface-Wert. Die Kombination der beiden blending-Methoden liegt sowohl mit ihrem μ_t -Verlauf, also auch mit den anderen Größen im Wesentlichen zwischen den beiden Einzelmethoden. Das Problem des Knicks wird also auch durch Hinzunahme eines blendings auf LES-Seite nicht gelöst, bringt aber zusätzliche Probleme mit sich, so dass es im folgenden nicht mehr berücksichtigt wird:

1. LES liegt meist ein einfaches Modell zugrunde, welches von der Konzeption her nur für isotrope Turbulenz bei kleinen Skalen gedacht ist. Eine Erhöhung dieses Anteils auf Gittern mit eher größeren Auflösungen verstärkt den durch die Annahme isotroper Turbulenz ohnehin gemachten Fehler zusätzlich.
2. Das Hauptergebnis der hybriden Rechnung soll LES sein, RANS dient nur als Wandmodell. Es ist daher angebracht, das LES-Modell „unbeschadet“ zu lassen, damit eine möglichst große Allgemeingültigkeit erreicht wird.

3. Bessere Modelle, wie z.B. das Germano-Modell, bestimmen die Modellkonstanten mit Hilfe einer dynamischen Prozedur aus der Rechnung heraus. Eine Anpassung über diese Konstanten ist somit unpraktisch und schränkt lediglich die Kopplungsmöglichkeiten ein.

Alle bisher vorgestellten blending-Methoden zeigen zwar eine Verbesserung in bestimmten Bereichen, können aber das Problem des Knicks nicht generell zufriedenstellend lösen. Es ist deshalb naheliegend, die Ausgangsbasis für die Anwendung dieser Methoden, nämlich die Gleichsetzung der modellierten Viskositäten (4.13), in Frage zu stellen. Eine Erweiterung zu der Gleichsetzung nur der turbulenten Viskositäten stellt die Berücksichtigung der totalen Spannungen dar. Wie im obigen Abschnitt gezeigt wurde, ist hauptsächlich ein blending auf RANS-Seite sinnvoll. Die Bestimmung des Modellparameters C_μ aus (4.2) führt damit bei Annahme der Kopplung eines k - ε -Modells mit dem Smagorinsky-Modell (4.1) zu

$$2 C_\mu f_\mu k^2 / \varepsilon \bar{S}_{ij} = \overline{(\bar{U}_i - \bar{\bar{U}}_i)(\bar{U}_j - \bar{\bar{U}}_j)} - \overline{(\hat{U}_i - \hat{\bar{U}}_i)(\hat{U}_j - \hat{\bar{U}}_j)} + 2 C_s^2 \Delta^2 |S| \hat{S}_{ij} \quad (4.17)$$

wenn man die Dichte auf beiden Seiten als äquivalent ansieht. Bei dieser Gleichung handelt es sich im Prinzip um neun Gleichungen, denn man hat es mit Tensoren 2. Stufe zu tun. An dieser Stelle wird die große Vereinfachung sichtbar, die bei Wirbelviskositätsmodellen zur Anwendung kommt: Der Tensor 2. Stufe der Reynoldsspannungen wird nur durch Veränderung einer skalaren Größe (μ_t) auf den Verzerrungstensor S_{ij} angepasst. Umgekehrt ergibt sich daraus an dieser Stelle das Problem, dass neun bzw. aufgrund der Symmetrie des Verzerrungs- und somit auch des Spannungstensors sechs verschiedene Werte für C_μ aus (4.17) bestimmt werden können, aber im Modell nur einer benutzt wird. Eine naheliegende Möglichkeit ist die Verwendung des Mittelwertes aus den neun Gleichungen. Diese führt aber zu dem Problem, dass negative Werte für C_μ auftreten können. Eine andere Möglichkeit ist die Einführung einer Norm $||$ für die Tensoren 2. Stufe, was auf

$$C_\mu^{ifce} = \frac{\varepsilon}{2 f_\mu k^2} \frac{\left| \overline{(\bar{U}_i - \bar{\bar{U}}_i)(\bar{U}_j - \bar{\bar{U}}_j)} - \overline{(\hat{U}_i - \hat{\bar{U}}_i)(\hat{U}_j - \hat{\bar{U}}_j)} + 2 C_s^2 \Delta^2 |S| \hat{S}_{ij} \right|}{|\bar{S}_{ij}|} \quad (4.18)$$

führt. Ungeklärt bleibt noch die Frage nach der zu benutzenden Norm. In Anlehnung an die Berechnung der Scherrate S wird die sogenannte **Frobenius-Norm** verwendet. Substituiert man in (4.18) den Tensor 2. Stufe im Zähler durch A_{ij} und den Nenner durch B_{ij} , dann ergibt sich somit folgende Berechnungsvorschrift für C_μ^{ifce} :

$$C_\mu^{ifce} = \frac{\varepsilon}{2 f_\mu k^2} \frac{|A_{ij}|}{|B_{ij}|} = \frac{\varepsilon}{2 f_\mu k^2} \frac{\sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 + \dots + A_{33}^2}}{\sqrt{B_{11}^2 + B_{12}^2 + B_{13}^2 + \dots + B_{33}^2}}$$

Geht man an dieser Stelle wieder zu den vereinfachenden Annahmen zurück, die im Rahmen der Gleichsetzung nur der modellierten Viskositäten für die beiden Seiten der Trennfläche gemacht wurden (S. 76),

1. Gleichheit des aufgelösten Anteils der Spannungen: $\tau_{res}^{LES} = \tau_{res}^{RANS}$

$$\text{mit (4.2)} \quad \Rightarrow \quad \tau_{mod}^{LES} = \tau_{mod}^{RANS} \quad \Rightarrow \quad C_{\mu}^{ifce} = \frac{\varepsilon}{f_{\mu} k^2} \frac{C_s^2 \Delta^2 |S| |\hat{S}_{ij}|}{|\bar{S}_{ij}|} \quad (4.19)$$

2. oder zusätzlich noch Gleichheit des Verzerrungstensors: $\hat{S}_{ij} = \bar{S}_{ij}$

$$\text{mit (4.2)} \quad \Rightarrow \quad \mu_t^{LES} = \mu_t^{RANS} \quad \Rightarrow \quad C_{\mu}^{ifce} = \frac{\varepsilon}{f_{\mu} k^2} C_s^2 \Delta^2 |S| \quad (4.20)$$

wird man wieder auf die Gleichheit der modellierten Viskositäten (4.13) zurückgeführt, was auch zwingend ist, denn (4.13) ist aus (4.18) durch genau diese Annahmen entstanden. Das bedeutet aber, dass es mit der erweiterten Formulierung (4.18) möglich ist, nachträglich die getroffenen Annahmen zu überprüfen. Dazu wird eine Simulation mit linearem blending auf Basis von (4.13) durchgeführt. Gleichzeitig werden aber neben dem für diese Rechnung benötigten C_{μ}^{ifce} aus (4.15) - entspricht Vereinfachung 1 und 2 (4.20) - zusätzlich noch passiv der Wert für C_{μ}^{ifce} ohne Vereinfachung (4.18) und C_{μ}^{ifce} mit Vereinfachung 1 (4.19), also ohne den aufgelösten Anteil aber mit den unterschiedlichen Verzerrungstensen S_{ij} , berechnet. Das Ergebnis über 10000 Iterationen, was ca. 20 Durchflusszeiten im Kanal entspricht, ist in Abb. 4.13 gezeigt. Dabei ist auf der linken Seite ein beliebiger Punkt ausgewählt

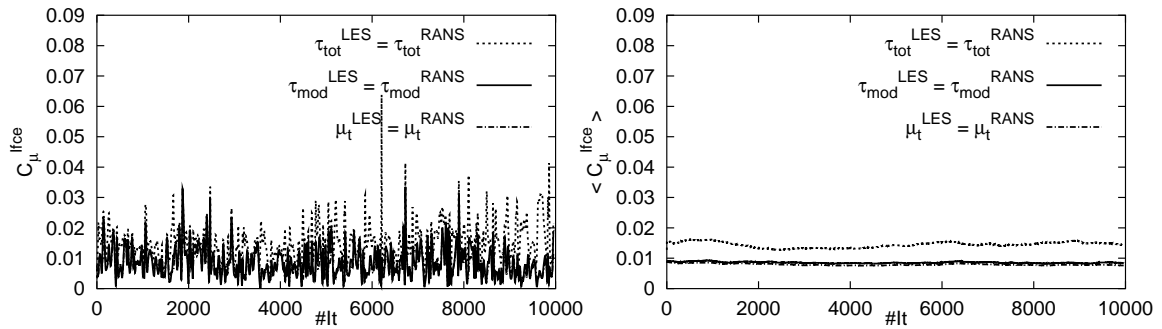


Abbildung 4.13: Verlauf des Parameters C_{μ}^{ifce} für unterschiedliche Annahmen an der Trennfläche ((4.18), (4.19), (4.20)) bei aktiver Annahme gleicher modellierter Viskosität (links: ausgewählter Punkt, rechts: gemittelt über alle Interface-Punkte)

worden, rechts wurde über alle Punkte des Interface gemittelt. Man erkennt zum einen, dass C_{μ}^{ifce} einen sehr instationären Verlauf aufweist und für alle drei Fälle um einen Wert von $C_{\mu}^{ifce} \approx 0.01$ oszilliert. Mit zunehmenden Vereinfachungen oszilliert der Wert immer weniger, was einleuchtend ist, wenn man bedenkt, dass die instationären aufgelösten Terme mit jeder Vereinfachung weniger werden. Konzentriert man sich auf die rechte Seite der Abbildung, bei der durch die Mittelung etwas mehr Klarheit geschaffen wird, dann erkennt man, dass der Unterschied zwischen (4.19) und (4.20), der nur durch die beiden verschiedenen Verzerrungstensen rechts und links der Trennfläche ausgemacht wird, sehr gering ist. Die zu Anfang gemachte

Annahme der Gleichheit der beiden im Falle gleicher modellierter Viskositäten ist demnach gut erfüllt. Gegenüber keiner Vereinfachung ist der Unterschied etwas stärker. Der Wert von C_μ^{ifce} liegt um den Faktor 1.8 höher. Ein Vergleich mit (4.2) zeigt, dass damit der aufgelöste Teil auf RANS-Seite etwas kleiner ist als auf LES-Seite, was bei Betrachtung von Abb. 4.7 (S.72) bestätigt wird. Bindet man nun die neue

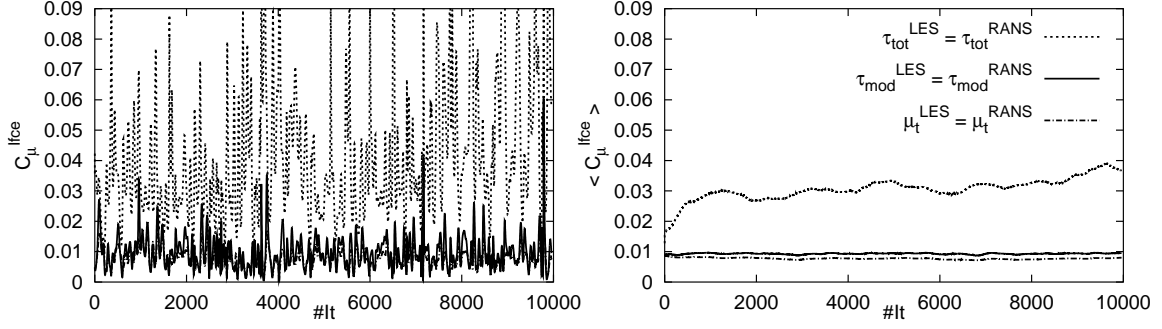


Abbildung 4.14: Verlauf des Parameters C_μ^{ifce} für verschiedene vereinfachende Annahmen bei aktiver Annahme gleicher totaler Spannungen (links an einem ausgewählten Punkt, rechts gemittelt über alle Interface Punkte)

Bedingung für C_μ^{ifce} aus der Gleichheit der totalen Spannungen (4.18) aktiv in die Rechnung ein, dann stellt sich das Ergebnis Abb. 4.14 ein. Im Unterschied zu den passiven Voruntersuchungen (Abb. 4.13) fällt die Differenz zwischen den Werten für C_μ^{ifce} wesentlich größer aus. Dies liegt daran, dass durch (4.18) eine sehr viel stärkere Kopplung zwischen dem Ergebnis und der Bestimmung von C_μ^{ifce} besteht als in (4.15), in der die Rückwirkung der Strömung nur in $|S|$ zum Ausdruck kommt. Mit Veränderung des Wertes von C_μ an der Trennfläche ändert sich auch die modellierte Viskosität. Betrachtet man deren Verlauf in Abbildung 4.15, dann fällt auf, dass der Übergang nicht mehr kontinuierlich ist. Das war zu erwarten, denn (4.13) wurde durch (4.2) ersetzt, so dass sich jetzt eine Situation einstellt, in der die Summe der beiden Spannungsanteile möglichst gleich ist, die genaue Verteilung der modellierten oder aufgelösten Anteile auf der LES-Seite und der RANS-Seite aber recht unterschiedlich sein kann. Man kann gut erkennen, dass der Sprung in der turbulenten Viskosität direkt mit dem Sprung im mittleren Schubspannungsprofil und somit auch im mittleren Geschwindigkeitsprofil verknüpft ist. Er fällt bei der Berücksichtigung der totalen Spannung zwar wesentlich schwächer aus als im Fall ohne blending, erreicht aber nie das niedrige Niveau der Rechnung mit starkem blending.

Als Fazit kann aus den zahlreichen Untersuchungen zum blending gewonnen werden:

1. Der Sprung in der turbulenten Viskosität ist direkt mit dem Sprung in den modellierten Spannungen und im mittleren Profil der Geschwindigkeit verknüpft. Dies ist durch die Boussinesq'sche Formulierung bedingt

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = -\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij},$$

in der μ_t direkt mit den Geschwindigkeitsgradienten multipliziert wird.

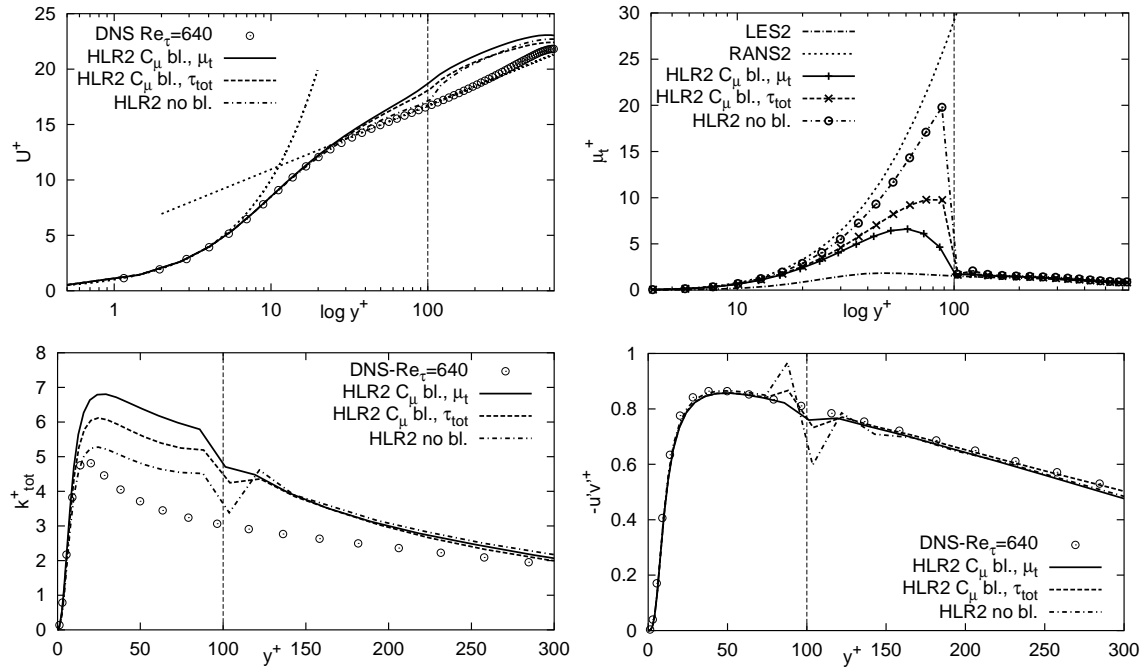


Abbildung 4.15: Vergleich von totalem mit vereinfachtem (bisherigem) C_μ -blending und dem Ergebnis ohne blending auf dem Gitter $24 \times 64 \times 36$

2. Die aufgelösten Spannungen, die direkt aus dem Geschwindigkeitsfeld berechnet werden können, ändern sich nicht schlagartig, sondern zeigen kontinuierliche Verläufe.
3. Mit Hilfe des blending ist es möglich, für die turbulente Viskosität einen kontinuierlichen Verlauf zu erzeugen. Dieser vermag den Sprung in allen Profilen auf Null zu reduzieren, allerdings nur direkt proportional zum Verzicht auf Genauigkeit in der RANS-Region.
4. Auch die Berücksichtigung der Gleichheit der totalen Spannungen bringt diesbezüglich keine Verbesserung.

Das Problem liegt also in der sprunghaften Änderung des Modellanteils begründet. Da sich der aufgelöste Anteil davon unbeeindruckt weiterhin kontinuierlich ändert und außerdem mit dem modellierten Anteil verknüpft ist, ist es bei einem vorhandenen Sprung niemals möglich, nur durch Manipulationen des Modellanteils, die totalen Spannungen auf beiden Seiten gleich groß werden zu lassen - es sei denn man blendet so stark, dass kein Sprung mehr existiert. Um jedoch die bestmögliche Genauigkeit in der RANS-Region mit einem möglichst geringen Sprung zu erreichen, müsste theoretisch auch eine Manipulation des aufgelösten Anteils - am besten auch sprunghaft - möglich sein. Dies kann mit Hilfe des sogenannten forcing erreicht werden, auf welches im nächsten Abschnitt eingegangen wird. Vorher soll aber noch in Erinnerung gerufen werden, welche Nachteile das blending mit sich bringt:

1. Zur Bestimmung des Wertes am Interface muss zusätzlich für jeden Punkt noch der zugehörige Interface-Punkt bekannt sein, um Gleichung (4.15) bzw. (4.16) auswerten zu können. Dies ist im Falle einer Kanalströmung einfach, bei komplexen Geometrien jedoch ungleich schwerer und unter Umständen auch nicht mehr eindeutig.

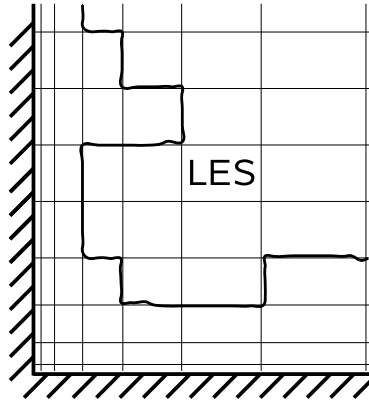


Abbildung 4.16: Skizze zum möglichen Verlauf des Interface

2. Für das blending werden empirische Funktionen (linear, exponentiell o.ä.) benutzt, die die Allgemeingültigkeit der Methode einschränken.
3. Die oben genannten Maßnahmen vergrößern die Rechenzeit.
4. Die Modellgleichungen werden im kompletten Gebiet gelöst, was wiederum Rechenzeit kostet.

Da das blending an sich, wie sich später herausstellen wird, aber dennoch ein unverzichtbares Element für die Etablierung der Gesamtmethode darstellt, wird im Folgenden eine Methode vorgestellt, die ein blending in gewissem Maße ermöglicht, ohne die oben beschriebenen Nachteile in Kauf zu nehmen, das sogenannte **implizite blending**. Die Idee dieses Verfahrens ist es, den gewünschten Randwert für die turbulente Viskosität implizit festzulegen, in dem man die Werte in den Turbulenzgleichungen (z.B. k und ε), die dann die turbulente Viskosität bestimmen, an der Trennfläche vorgibt. Dadurch stellt sich bei der Lösung des Gleichungssystems automatisch ein blending auf diesen Wert hin ein. Die praktische Umsetzung erfolgt ähnlich der manuellen Vorgabe eines Wandwertes durch Manipulation der Quellterme S_u und S_p :

$$S_p = -10^{30} \quad \text{und} \quad S_u = 10^{30} \phi_{soll}$$

Dabei wird mit 10^{30} sichergestellt, dass dieser Beitrag immer groß gegenüber den anderen Koeffizienten ist. Da diese im LES-Gebiet sowieso nicht gebraucht werden, kann auf deren Berechnung ganz verzichtet werden, was zusätzlich Rechenzeit einspart. Setzt man sie z.B. gleich Null, dann kann anstelle von 10^{30} auch 1 verwendet

werden. Was noch zu tun bleibt, ist die Berechnung der Werte am Rand. Diese sehen je nach verwendeter Modellkombination unterschiedlich aus. Für die in der Arbeit am häufigsten verwendete Kombination von Smagorinsky- und k - ε -Modell müssen die beiden Werte k_{SGS} und ε_{SGS} berechnet bzw. abgeschätzt werden. Dazu werden zunächst zwei Annahmen getroffen ([4], [53]):

1. Die Grenzfrequenz bzw. die Grenzwellenzahl $k_c = \pi/\Delta$ liegt im inertialen Bereich, womit ebenfalls impliziert wird, dass es diesen Bereich überhaupt gibt, also eine hohe Reynoldszahl vorliegt.
2. Für die Modellierung des nicht aufgelösten Teils der turbulenten Spannungen wird eine zur Boussinesq-Approximation analoge Formulierung benutzt

$$\tau_{ij}^{SGS} = -2\nu_{SGS} \hat{S}_{ij},$$

welche unter anderem dem Smagorinsky-Modell, dem Germano-Modell, oder auch dem Yoshizawa-Modell zugrunde liegt.

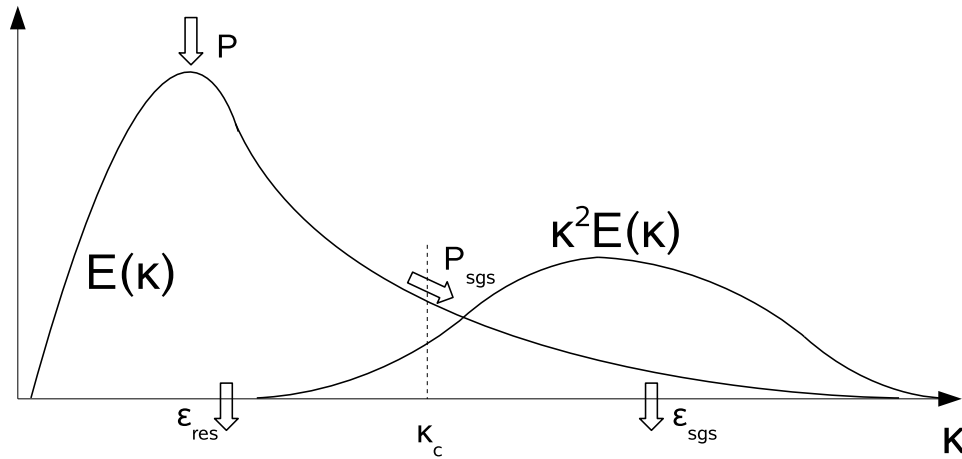


Abbildung 4.17: Skizze zum Energiehaushalt im Spektralraum bei einer LES

Anhand des Spektrums in Abb. 4.17 ist modellhaft die Situation des Energiehaushaltes der Energiekaskade dargestellt. Die produzierte turbulente Energie P wird über die Energiekaskade an die großen Wellenzahlen (kleine Strukturen) weitergegeben und dort dissipiert. Beim idealen Spektrum wird die gesamte Energie oberhalb der Grenzwellenlänge κ_c dissipiert. Bei einer realen Rechnung jedoch setzt sich die gesamte Dissipation, wie bei den Spannungen, aus zwei Anteilen zusammen, einem aufgelösten (res) und einem modellierten (SGS):

$$\varepsilon = \varepsilon_{res} + \varepsilon_{SGS} \quad \text{wobei} \quad \varepsilon_{res} = 2\nu \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{SGS} = 2\nu_{SGS} \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij} \quad (4.21)$$

Bei beiden Anteilen wird dabei der aufgelösten Anteil der Scherrate $|\hat{S}|^2 = 2 \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij}$ verwendet, denn es kann nur eine Information aus dem aufgelösten Feld zur Modellierung des nicht aufgelösten benutzt werden. Die Information über die Auflösung

ist in der modellierten Viskosität ν_{SGS} versteckt. Für Smagorinsky- oder Germano-Modell ergibt sich somit

$$\varepsilon_{SGS} = \nu_{SGS} |\hat{S}|^2 = (C_s \Delta)^2 |\hat{S}|^3. \quad (4.22)$$

Diese muss nach dem Kaskadenmodell gleich der Energietransferrate P_{SGS} sein, was unter Berücksichtigung der 2. Voraussetzung auch gegeben ist:

$$P_{SGS} \equiv -\tau_{ij}^{SGS} \hat{S}_{ij} = 2\nu_{SGS} \hat{S}_{ij} \hat{S}_{ij} = \varepsilon_{SGS} \quad (4.23)$$

Interessant ist jetzt noch, eine Aussage über den Unterschied von ε und ε_{SGS} bzw. ε_{res} machen zu können. Drückt man mit (4.21) direkt das Verhältnis von aufgelöster zu gesamter Dissipation aus, so erhält man

$$\frac{\varepsilon_{res}}{\varepsilon} = \frac{1}{1 + \frac{\nu_{SGS}}{\nu}}. \quad (4.24)$$

Eine andere interessante Beziehung ergibt sich, wenn man die Scherrate $|\hat{S}|^2$ in (4.22) aus dem Energiespektrum bestimmt. Da es sich um eine aufgelöste Größe handelt, bewegt man sich im Spektralraum nur im Gebiet von 0 bis κ_c . Um das Integral vollständig auswerten zu können, kommt die erste Annahme ins Spiel. Liegt die Filterweite im Bereich des Übergangsgebietes, dann wird $E(\kappa)$ näherungsweise durch ein Kolmogorov-Spektrum $E(\kappa) = C_k \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$ (vgl. (2.45 S.21)) beschrieben, wobei $C_k \approx 1.5$. Streng genommen gilt dies nur für isotrope Turbulenz. Bei einer hohen Reynoldszahl ist diese Annahme im Bereich des Übergangsgebietes jedoch nicht allzu falsch. Da das Kolmogorov-Spektrum zur Bestimmung der Scherrate und damit auch der Dissipationsrate mit κ^2 multipliziert wird, bleiben zudem die Fehler, die im Bereich von Null bis zum Maximum in $E(\kappa)$, in welchem das Spektrum eine andere, sogar positive Steigung besitzt, klein. Ein Blick in Abb. 4.17 zeigt schon, dass das Integral in (4.25) je nach Position der Grenzwellenlänge κ_c eher klein gegenüber dem Integral von κ_c bis ∞ ausfällt.

$$|\hat{S}|^2 = \int_0^{\pi/\Delta} 2\kappa^2 E(\kappa) d\kappa = \int_0^{\pi/\Delta} 2 C_k \varepsilon^{2/3} \kappa^{1/3} d\kappa = \frac{3}{2} C_k \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\pi}{\Delta} \right)^{4/3} \quad (4.25)$$

Der zu (4.24) analoge Ausdruck ergibt sich mit Hilfe des Kolmogorov'schen Längenmaßes η zu

$$\frac{\varepsilon_{res}}{\varepsilon} = \frac{3}{2} C_k \pi^{4/3} \left(\frac{\Delta}{\eta} \right)^{-4/3} \approx 10 \left(\frac{\Delta}{\eta} \right)^{-4/3}. \quad (4.26)$$

Der Term Δ/η wird häufig zur Untersuchung der benutzten Auflösung eingesetzt. Erfahrungswerte für eine gut aufgelöste LES liegen im Bereich von $\Delta/\eta \approx 10$. Nach (4.26) beträgt der aufgelöste Anteil der Dissipation dann trotzdem nur ca. 46%. Um den gleichen Anteil gemäß (4.24) zu erhalten, darf ν_{SGS}/ν den Wert 1.2 nicht überschreiten. Daraus wird ersichtlich, dass bei gröberen Auflösungen, wie man sie häufig im Rahmen der hybriden Modelle antrifft, der aufgelöste Anteil an ε schnell klein wird, so dass $\varepsilon_{SGS} \approx \varepsilon$. Dies ist in Abb. 4.7 unten links auch gut zu erkennen.

Erst im Gebiet nahe an der Wand ($y^+ = O(10)$), in welchem definitiv keine isotrope Turbulenz mehr vorliegt, liefert der aufgelöste Teil einen zunehmend großen Beitrag. Dieses Gebiet ist für die Abschätzungen an der Trennfläche jedoch nicht relevant. Während die Berechnung von ε_{SGS} durch ihre Definition relativ eindeutig ist, können bei der Bestimmung von k_{SGS} größere Unterschiede auftreten. Da der isotrope unaufgelöste Spannungsanteil ($2/3 k_{SGS} \delta_{ij}$) im modifizierten gefilterten Druck mitberücksichtigt wird, ist es im Prinzip nicht möglich, den genauen Wert für k_{SGS} zu bestimmen. Es muss mit Abschätzungen gearbeitet werden. Aus Dimensionsgründen und aus Analogie zum Vorgehen bei den RANS-Methoden ($\varepsilon = k^{3/2}/L$) skaliert die turbulente kinetische Energie der unaufgelösten Skalen mit $\sim \Delta^2 |\hat{S}|^2$, so dass sich allgemein der folgende Ausdruck ergibt:

$$k_{SGS} = C_I \Delta^2 |\hat{S}|^2 \quad (4.27)$$

Bei der Bestimmung der Konstanten C_I treten jedoch in der Literatur starke Unterschiede auf. Ein sinnvolles Vorgehen ist wiederum die Annahme eines Filters im Bereich des Übergangsgebietes ([4], [53]), was die Benutzung des Kolmogorovspektrums $E(\kappa) = C_k \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$ ermöglicht - wohlgemerkt nur für isotrope Turbulenz, womit der Abschätzungscharakter für k_{SGS} nochmals unterstrichen wird. Man muss jedoch berücksichtigen, dass es sich bei der zu berechnenden turbulenten kinetischen Energie um eine Größe handelt, welche im Gegensatz zum Integral in (4.25) nur mit kleinen Skalen im Bereich von der Grenzwellenzahl π/Δ theoretisch bis ∞ assoziiert ist, so dass die Annahme isotroper Turbulenz, zumindest in Wandferne, gerechtfertigt ist. Damit ergibt sich

$$k_{SGS} = \int_{\pi/\Delta}^{\infty} E(\kappa) d\kappa = \int_{\pi/\Delta}^{\infty} C_k \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} d\kappa = \frac{3}{2} C_k \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\pi}{\Delta}\right)^{-2/3} \quad (4.28)$$

Ein Vergleich mit (4.25) und (4.27) ergibt

$$k_{SGS} = \frac{1}{\pi^2} \Delta^2 |\hat{S}|^2 \quad (4.29)$$

und damit $C_I = 1/\pi^2 \approx 1/10$ [4]. Andererseits kann man (4.22) mit der Annahme $\varepsilon \approx \varepsilon_{SGS}$ direkt in (4.28) einsetzen und erhält:

$$k_{SGS} = \underbrace{\frac{3}{2} C_k C_s^{4/3} \pi^{-2/3}}_{C_I} \Delta^2 |\hat{S}|^2 \quad (4.30)$$

wobei $C_I \approx 1/20$, wenn man $C_s = 0.1$ wählt. Geht man von einer feinen Auflösung aus, welche im Falle der hybriden Verfahren jedoch meist nicht vorliegt, dann ergibt sich aus (4.26) $\varepsilon \approx 2\varepsilon_{SGS}$ und damit $C_I \approx 1/13$, was etwas näher an der ersten Abschätzung (4.29) liegt.

Eine ganz andere Vorgehensweise ist es, eine Analogie zur RANS-Modellierung herzustellen und die modellierte Viskosität analog (Mason und Callen [44])

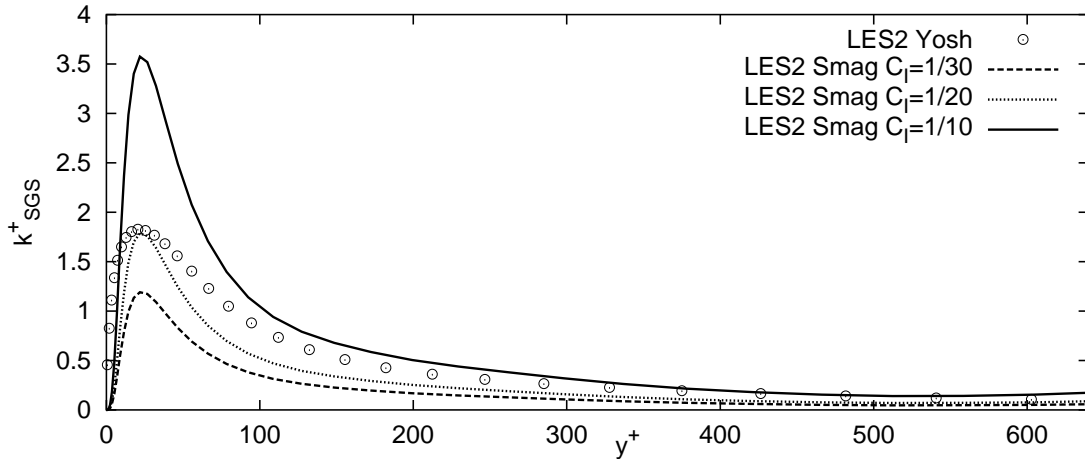
$$\nu_{SGS} = (C_s \Delta)^2 |\hat{S}| = C_\mu \frac{k_{SGS}^2}{\varepsilon_{SGS}} \quad (4.31)$$

zu bestimmen. Mit (4.27) und (4.22) erhält man daraus eine Gleichung für k_{SGS} :

$$k_{SGS} = \frac{\nu_t |\hat{S}|}{\sqrt{C_\mu}} = \frac{C_s^2}{\sqrt{C_\mu}} \Delta^2 |\hat{S}|^2 \quad (4.32)$$

Bei einem Wert für C_s von 0.173 ergibt sich $C_I \approx 1/10$ und damit die gleiche Abschätzung wie mit (4.29). Mit dem Standard-Wert $C_s = 0.1$ wird die Abschätzung (4.32) jedoch um einen Faktor von 3 kleiner ($C_I \approx 1/30$).

Wie anhand der verschiedenen Werte für C_I zu erkennen ist, gibt es relativ große Unterschiede in der Abschätzung von k_{SGS} . Aus dem oben genannten Grund der Zusammenführung mit dem Druckterm ist eine genauere Bestimmung jedoch nur durch zusätzliche Lösung einer Gleichung für k_{SGS} , wie z. B. beim Yoshizawa-Modell, möglich. Da hier bestimmte Terme ebenfalls modelliert werden, wird k_{SGS} wiederum nicht exakt bestimmt, sollte aber besser als mit den genannten Formeln abgeschätzt werden können. Um eine Abschätzungsvariante festzulegen, wird deshalb die Kanalströmung sowohl mit Yoshizawa-, als auch mit Smagorinsky-Modell, jeweils mit den unterschiedlichen Abschätzungen für k_{SGS} , berechnet und verglichen. Wie man an-



Abbildungung 4.18: Vergleich von k_{SGS} einer LES-Berechnungen mit Yoshizawa- und Smagorinsky-Modell mit den Abschätzungen (4.32), (4.30) und (4.29)

hand von Abb. 4.18 sehen kann, stellt sich heraus, dass der Verlauf zwischen (4.29) und (4.30) liegt. Die dritte Abschätzung (4.32), welche ja bei $C_s = 0.1$ nur ein Drittel von (4.29) beträgt, zeigt bei der Kanalströmung demnach zu kleine Werte an, was auch im Einklang mit anderen Mitteln zur Abschätzung der Auflösung (Δ/η , Δx^+ , Δy^+ , Δz^+) steht.

Ein wichtiger Nebeneffekt der Benutzung unterschiedlicher Abschätzungen wird ersichtlich, wenn man nun nachträglich die zu RANS analoge Viskosität (4.33) berechnet. Dies ist der Wert, der sich durch die implizite Vorgabe von k_{SGS} und ε_{SGS} an der Trennfläche ergibt.

$$\nu_{RANS}^{ifce} = C_\mu \frac{k_{SGS}^2}{\varepsilon_{SGS}} = C_\mu \frac{C_I^2 \Delta^4 |\hat{S}|^4}{(C_s \Delta)^2 |\hat{S}|^3} = \frac{C_\mu C_I^2}{C_s^2} \Delta^2 |\hat{S}| \quad (4.33)$$

Ein Vergleich mit der Viskosität des Smagorinsky-Modells (4.31) an dieser Stelle ergibt dann:

$$\frac{\nu_{RANS}^{ifce}}{\nu_{SGS}^{ifce}} = \frac{C_\mu C_I^2}{C_s^4} \approx 9 \quad \text{mit} \quad (4.29) \quad \text{und} \quad C_s = 0.1 \quad (4.34)$$

Dadurch, dass k_{SGS} quadratisch in die Berechnung eingeht, ergibt sich ein Unterschied um einen Faktor von 9 an der Trennfläche. Vergleicht man den Wert mit Abb. 4.15 oben rechts, dann erkennt man, dass dieser im Kanal dem Unterschied der turbulenten Viskositäten links und rechts des Interface bei der Benutzung des totalen blending entspricht. Abbildung 4.19 zeigt das Ergebnis von Berechnungen mit den verschiedenen k_{SGS} -Abschätzungen (4.32), (4.30) und (4.29) auf dem Gitter $24 \times 64 \times 36$. Anhand des Verlaufs der normierten turbulenten Viskosität μ_t^+ ist direkt der durch die unterschiedlichen Abschätzungen an der Trennfläche vorgegebene Wert zu erkennen. Durch den quadratischen Einfluss von k_{SGS} (4.34), ist der Unterschied zwischen $C_I = 1/20$ und $C_I = 1/10$ wesentlich größer als der zwischen $1/30$ und $1/20$. Dementsprechend stellen sich auch die übrigen Verläufe dar. Im Grunde zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie im Falle der verschiedenen blending-Funktionen (Abb. 4.12) oder des totalen blending (Abb. 4.15): Ein größerer Unterschied in μ_t bedeutet im RANS-Gebiet eine bessere Übereinstimmung mit den Referenzdaten, ist aber dafür mit größeren Unstetigkeiten (Knicks) sowohl im gemittelten Geschwindigkeitsprofil als auch in den Spannungen verbunden. Es gilt demnach weiterhin das Fazit, welches bezüglich des C_μ -blending auf Seite 81 gezogen wurde, dass zur Reduzierung der Unstetigkeiten unter Beibehaltung des guten Verhaltens im RANS-Gebiet der aufgelöste Teil getrennt mittels forcing beeinflusst werden muss. Dennoch kann festgehalten werden, dass das implizite blending folgende Vorteile bringt:

1. An der Trennfläche müssen keine zusätzlichen Informationen gespeichert oder berechnet werden und die Anwendung auf beliebig komplizierte Interface-Verläufe ist möglich.
2. Im LES-Gebiet müssen keine Koeffizienten für die Modellgleichungen berechnet werden.
3. Die SGS-Werte, welche in diesem Gebiet in die aufgrund des RANS-Teils ohnehin allokierten Arrays der Modellgleichungen eingetragen werden, eignen sich weiterhin zur Abschätzung der Gitterauflösung.
4. Es kommen keine empirischen Funktionen zum Einsatz. Der einzige noch nicht vollkommen geklärte Punkt ist der Wert von C_I , für den aber später noch Empfehlungen gegeben werden.

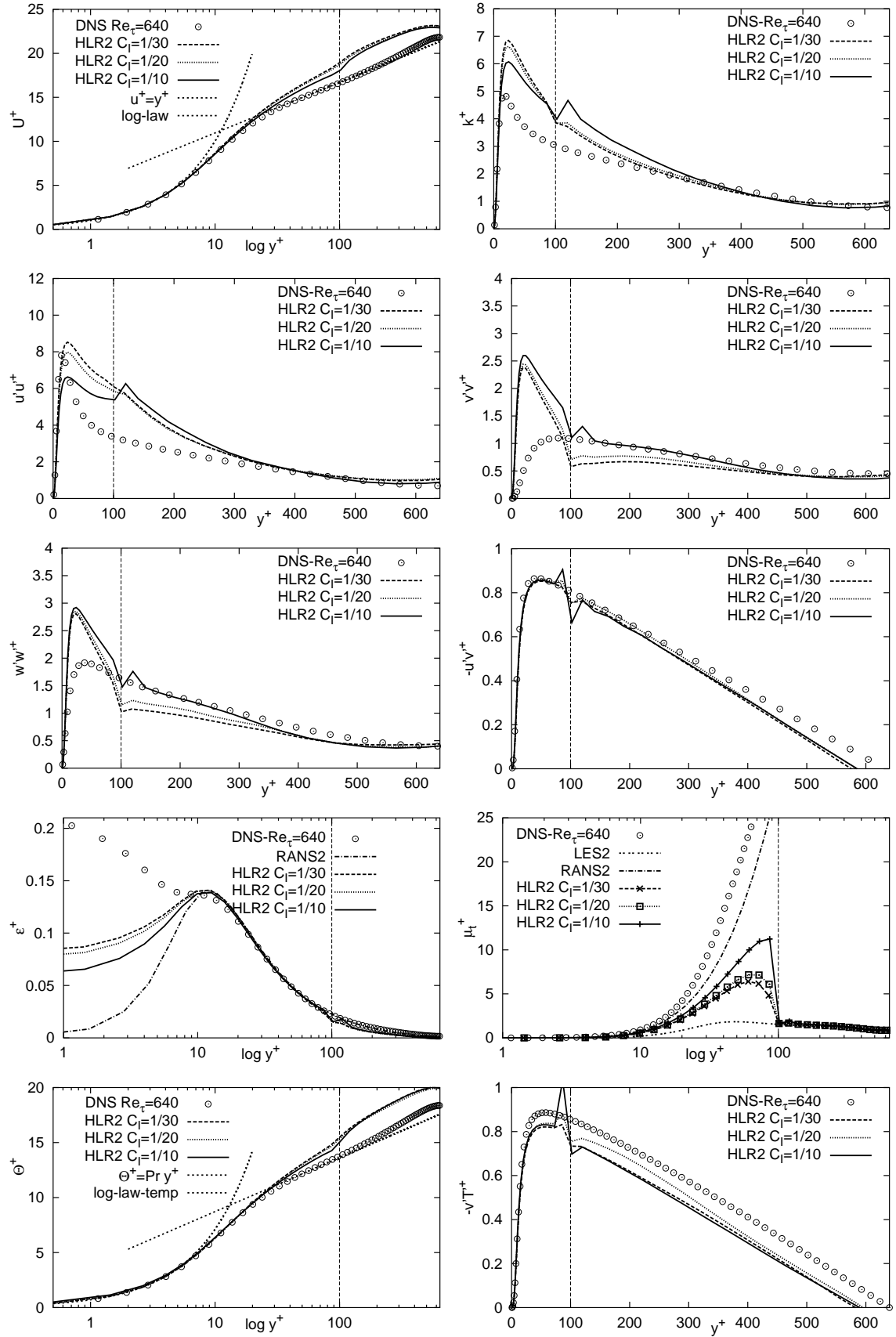


Abbildung 4.19: Vergleich von HLR-Berechnungen mit verschiedenen k_{SGS} -Abschätzungen (4.32), (4.30) und (4.29) auf dem Gitter $24 \times 64 \times 36$

4.4.3 Forcing

Wie im vorherigen Kapitel gezeigt, lässt sich der Knick im Geschwindigkeitsprofil mit Hilfe der blending-Funktionen beheben. Allerdings auf Kosten der Güte der Gesamtlösung, da das Profil aufgrund der dafür nötigen Verkleinerung der turbulenten Viskosität im RANS-Gebiet schon relativ früh von der richtigen Lösung abweicht. Da mit einer Änderung des modellierten Anteils immer auch eine Änderung des aufgelösten verbunden ist, ist es schwer, alleine dadurch sowohl den Knick im mittleren Geschwindigkeitsprofil zu beseitigen, als auch eine gute Lösung zu erhalten. Hilfreich dafür ist die Möglichkeit, den aufgelösten Anteil getrennt beeinflussen zu können. Dies wird mit Hilfe des sogenannten „forcing“ möglich. Die Anwendung dieser Technik hat den physikalische Hintergrund, dass man als Ursache für den Knick im Profil auch die unzureichende Bereitstellung an Turbulenz-Information des RANS-Gebietes für das LES-Gebiet sehen kann. Dies wird mit Hilfe von Abbildung 4.20 deutlich: Gezeigt wird das Geschwindigkeitsfeld in der ersten Gitterzelle

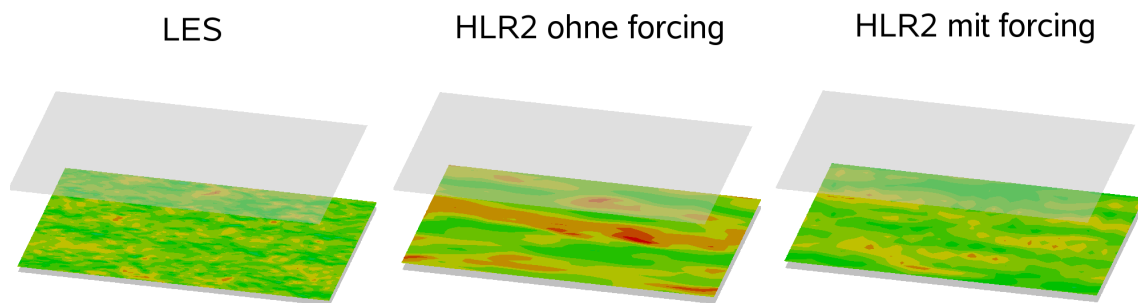


Abbildung 4.20: Geschwindigkeiten auf der LES-Seite des Interface im Falle einer hoch aufgelösten LES (links), einer hybriden Rechnung ohne forcing (mitte) und einer hybriden Rechnung mit forcing (rechts)

des LES-Gebietes. Bei der hybriden Simulation sind die Auswirkungen der benachbarten RANS-Rechnung klar erkennbar. Es gibt kaum kleine Wirbel, sondern nur große, zusammenhängende Strukturen, die künstlich durch den starken Anstieg der effektiven Viskosität gebildet werden - sogenannte **superstreaks**. Baggett [3] fand 1998 heraus, dass sie den Austausch von wandnormalem Impuls behindern und damit hauptverantwortlich für den Informationsverlust sind. Im Gegensatz dazu sind bei einer „reinen“ LES sehr viele verschiedene Skalen, also Wirbelgrößen erkennbar. Im Rahmen der gekoppelten, hybriden Berechnungen liefert RANS also keine korrekte Randbedingung für die LES im Kerngebiet.

Um diesem zu begegnen und den Mangel an kleinskaligen Strukturen zu beseitigen, werden am Interface Fluktuationen auf der LES-Seite überlagert, das Vorhandensein bzw. die Entstehung kleinskaliger Strukturen also sozusagen forciert. Die Erzeugung künstlicher, aber für die Strömung trotzdem realistischer Fluktuationen, welche schon vor der Entstehung der hybriden LES/RANS-Verfahren Gegenstand der Forschung war (z.B. backscatter-Modelle für LES-Simulationen von Leith [39] oder Mason [43]) und auch immer noch ist, wird damit zum Kernproblem dieser

Methode. Von Klein et al. [34] wurde im Rahmen der Erzeugung von Inflow-Daten für LES und von Piomelli [51] im Rahmen erster forcing-Versuche beobachtet, dass reine Zufallszahlen als Randbedingungen für LES bzw. für das forcing ungeeignet sind. Der Grund dafür ist die fehlende Information dieser Fluktuationen über Zeit- und Längenskalen. Eine Korrelation, welche ein direktes Maß für turbulente Skalen darstellt (z.B. integrales Längenmaß), ist bei stochastischen Fluktuationen nicht vorhanden. Turbulente Strukturen haben deshalb sowohl zeitlich, als auch räumlich die Länge Null, existieren also nicht. Die Fluktuationen werden somit innerhalb kürzester Strecke bzw. Zeit durch den vorgegebenen Zeitschritt bzw. das numerische Gitter herausgefiltert.

Eine Idee, die unter anderem von Davidson [13] verfolgt wird, ist die Benutzung von **Daten aus einer Direkten Numerischen Simulation (DNS)**. Da es nicht sinnvoll ist, vor einer Berechnung mit einem hybriden Verfahren erst noch eine DNS der Problemströmung durchzuführen, müssen Daten aus vorher berechneten Standard-Fällen, wie z.B. einer Kanalströmung, herangezogen werden. Zur Anpassung auf die Problemkonfiguration werden diese dann skaliert, so dass die Turbulenzcharakteristika wie Längenmaße und Spannungen übereinstimmen. Da jedoch im Hintergrund immer eine DNS-Datenbank bereitstehen muss und die Skalierung der Turbulenz der Modellströmung auf die aktuelle Konfiguration mit vielen Fragen behaftet ist, erscheint es sinnvoller, nach einer alternativen Methode zu suchen.

Eine Methode, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit erprobt wurde, ist die der **Eigenanregung**. Dabei werden Fluktuationen verstärkt, die schon in der Strömung vorhanden sind. Praktisch läuft dies so ab, dass in den Impulsgleichungen Quellterme hinzuaddiert werden. Diese enthalten die Fluktuationen der turbulenten Normalspannungen

$$S_U = \rho \gamma \overline{u'u'} A_U, \quad S_V = \rho \gamma \overline{v'v'} A_V, \quad S_W = \rho \gamma \overline{w'w'} A_W. \quad (4.35)$$

Der Faktor γ gibt an, wie stark die berechneten Fluktuationen nochmal überlagert werden. Als Fläche A wird die Fläche des Kontrollvolumen in der jeweiligen Achsenrichtung gewählt. Das Problem an dieser Methode ist, dass nur die Fluktuationen verstärkt werden können, die auch schon vorhanden sind. Das sind aber gerade nicht diejenigen, die fehlen bzw. welche durch RANS weggedämpft wurden.

Ein verbesserter Ansatz besteht deshalb darin, Fluktuationen mit einer räumlichen Ausdehnung in der Größe der Filterweite und einer zeitlichen Ausdehnung in der Größe der Zeitschrittweite zu erzeugen. Zur Generierung dieser Fluktuationen wird eine Methode verwendet, die auf der von Klein et al. [34] vorgeschlagenen **Methode zu Erzeugung von Einlassdaten für LES- oder DNS-Rechnungen**, basiert. Ausgangspunkt für dieses Verfahren sind zeitgemittelte Profile der Geschwindigkeit und der Reynoldsspannungen. Das sind genau die Informationen, die durch eine RANS-Rechnung geliefert werden. Deshalb erscheint die Anwendung dieser Methode für das vorliegende Problem als sehr geeignet. Die einzelnen Schritte zur Erzeugung der Fluktuationen sehen wie folgt aus:

1. **Erzeugung stochastischer Fluktuationen:** Die Erzeugung erfolgt über eine Standard-Routine zur Generierung von Zufallszahlen. Da die Fluktuationen

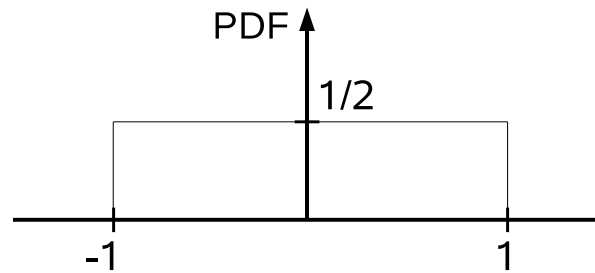


Abbildung 4.21: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) zur Generierung der Zufallszahlen

nen im Mittel gleich Null sein sollen, wird eine Verteilung mit Erwartungswert $E = 0$ benutzt (Abb. 4.21). Weiterhin sollte die Varianz $\sigma^2 = 1$ sein, denn übertragen auf Geschwindigkeitsfluktuationen stellt die Varianz nichts anderes als die turbulenten Spannungen dar. Für die spätere Anpassung an das Strömungsfeld bietet sich somit ein Einheitswert an. Die Varianz der gezeigten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beträgt $\sigma^2 = 1/3$, so dass die erzeugten Zufallszahlen noch durch die Wurzel der Varianz (Standardabweichung) $\sigma = \sqrt{1/3}$ geteilt werden müssen. Da es sich um dreidimensionale Turbulenz handelt, müssen drei Felder stochastischer Fluktuationen für die u -, v - und w -Komponenten der Geschwindigkeit erzeugt werden.

2. **Korrelierung der Fluktuationen:** Mit diesem Schritt werden den zufälligen Fluktuationen Abhängigkeiten und damit Strukturen aufgeprägt. Als Längenmaß wird im Unterschied zu Kleins Methode, bei der ein beliebiges Längenmaß vorgegeben werden kann, als festes Längenmaß die Maschenweite des numerischen Gitters verwendet. Das liegt daran, dass, wie bereits angesprochen, gerade die kleinen, hochfrequenten Fluktuationen als erste vom RANS-Gebiet gedämpft werden und somit in der Nähe der Trennfläche fehlen. Durch diese Festsetzung erniedrigen sich auch gleichzeitig die Kosten für die Filterung, da die Filterungs-Schleifen nur über wenige Zellen laufen müssen. Das ist auch der Punkt, an dem die ursprüngliche Methode zur Einlassdatengenerierung für das forcing nicht mehr anwendbar ist. Die Korrelierung findet dort gemäß einer vorgegebenen Standard-Korrelationsfunktion für isotrope Turbulenz statt und muss auf kartesischen, äquidistanten Gittern erfolgen. Die Einlassebene, auf der diese normalerweise durchgeführt wird, ist zudem zweidimensional. Im vorliegenden Fall wird zwar durch die Mittelung der Regelungsgröße k^* und deren Trennung von der Positionierungsgröße eine möglichst glatte Trennfläche erzeugt, in komplexen Geometrien kommt es jedoch trotzdem zu Unregelmäßigkeiten und Sprüngen (vgl. Abb. 4.16). Außerdem sind die Gitter mitunter weit von Regelmäßigkeit oder Rechtwinkligkeit entfernt. Aus diesem Grund wurde ein vereinfachtes Verfahren entwickelt, dass auch im vorliegenden Fall anwendbar ist. Die Korrelation wird durch eine Mittelung über die Nachbar-

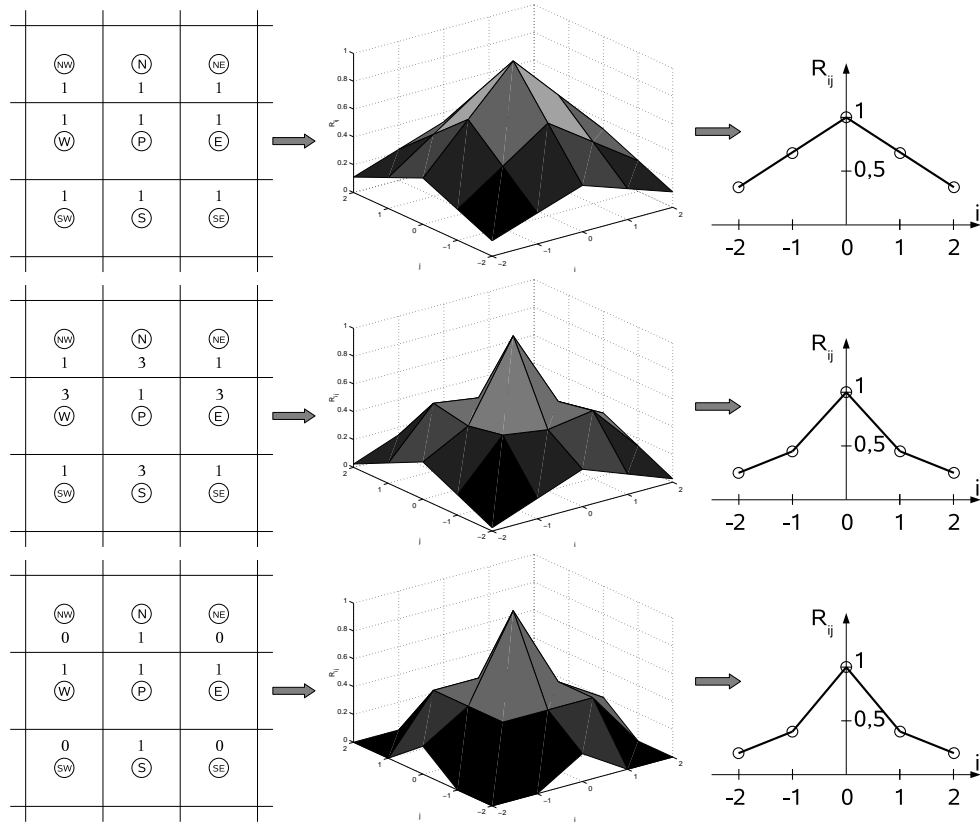


Abbildung 4.22: Unterschiedlichen Mittelungen entsprechende Korrelationsfunktionen für die vereinfachte forcing-Methode

punkte erreicht. Am einfachsten ist es, das arithmetische Mittel

$$\phi = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^n \phi_n \quad (4.36)$$

aus diesen zu verwenden. Damit wird eine linear abnehmende Korrelation erzeugt. Will man in Anlehnung an isotrope Turbulenz eine exponentiell abnehmende Korrelationsfunktion annähern, kann man noch eine Gewichtung der einzelnen Punkte einführen (Abb. 4.22).

$$\phi = \frac{1}{\sum g_n} \sum_{n=1}^n g_n \phi_n \quad (4.37)$$

Diese mag für die Anwendung vernünftiger erscheinen, vom physikalischen Standpunkt her ist sie aber nicht unbedingt sinnvoller als die erste Möglichkeit. Um Rechenzeit einzusparen wird die unterste der in (Abb. 4.22) gezeigten Möglichkeiten verwendet. Verallgemeinert auf den dreidimensionalen Fall müssen dann nur 7 anstelle von 27 Werte gemittelt werden. Mit dieser Methode werden im Endeffekt Strukturen mit der ungefähren Ausdehnung von zwei bis vier Maschenweiten erzeugt.

3. **Anpassung der Fluktuationen auf die lokalen Spannungen:** Mit Hilfe einer Methode nach Lund [40] werden die korrelierten Fluktuationen Φ_j über eine Transformationsmatrize a_{ij} auf die lokalen Reynoldsspannungen R_{ij} angepasst. Ergebnis dieser Transformation sind Geschwindigkeitsfluktuationen $u_i = a_{ij}\Phi_j$, die in ihrer Statistik dem vorgegebenen Reynoldsspannungstensor folgen.

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21}/a_{11} & (R_{22} - a_{21}^2)^{1/2} & 0 \\ R_{31}/a_{11} & (R_{32} - a_{21}a_{31})/a_{22} & (R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2)^{1/2} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

4. **Einbringung der synthetischen Fluktuationen in die Gleichung:** Die Einführung der Fluktuationen in die Impulsgleichung erfolgt über Quellterme ähnlich denen der Eigenanregung. Zahlreiche Tests zeigten jedoch, dass es ausreichend ist, nur in der Richtung normal zur Trennfläche forcing einzubringen. Dies steht im Einklang mit Beobachtungen von Baggett et al. (vgl. Abschnitt 1.2) ([3]), demzufolge die durch die hohe turbulente Viskosität erzeugten unphysikalischen Strukturen (superstreaks) hauptsächlich den Impulstransport in wandnormaler Richtung (also i.a. auch senkrecht zur Trennfläche) behindern. Die Beschränkung auf diese Richtung wird dadurch erreicht, dass als Fläche in den Gleichungen (4.39) nur die Projektion (A_n) aus der Berührungsfläche des Kontrollvolumens mit dem Interface und der jeweiligen Koordinatenrichtung verwendet wird:

$$S_U = \rho \gamma \overline{u'u'} A_n, \quad S_V = \rho \gamma \overline{v'v'} A_n, \quad S_W = \rho \gamma \overline{w'w'} A_n \quad (4.39)$$

Im Falle der schon häufig gezeigten Kanalströmung mit y als wandnormaler Richtung ist z. B. nur die Komponente S_V ungleich Null.

Bis zu dieser Stelle noch ungeklärt ist die Wahl des Faktors γ , mit dem die Stärke des forcing eingestellt wird. Die benötigte Stärke ist im Grunde direkt mit dem Grad der Dämpfung durch das RANS-Gebiet verbunden. Damit besteht automatisch eine enge Verbindung mit der Position der Trennfläche, aber auch mit der Art der Kopplung am Interface und der Wahl des Wertes C_I in der Abschätzung für die turbulente kinetische Energie k_{SGS} der Feinskalen (vgl. Abschnitt 4.4.2). Ein Maß für beide Punkte ist der Unterschied zwischen der modellierten Viskosität links und rechts des Interface. Um eine problemunabhängige Größe zu erhalten, bietet es sich an, diese Differenz mit dem Wert der molekularen Viskosität zu entdimensionieren, so dass sich folgender Ausdruck ergibt:

$$\gamma = \frac{\mu_m^{RANS} - \mu_m^{LES}}{\mu} \quad (4.40)$$

Einen Eindruck des Verlaufs des Parameters γ für verschiedene C_I -Werte während einer kompletten Berechnung im Kanal mit $y^{f_{ce}} = 0.017$ gibt Abb. 4.23:

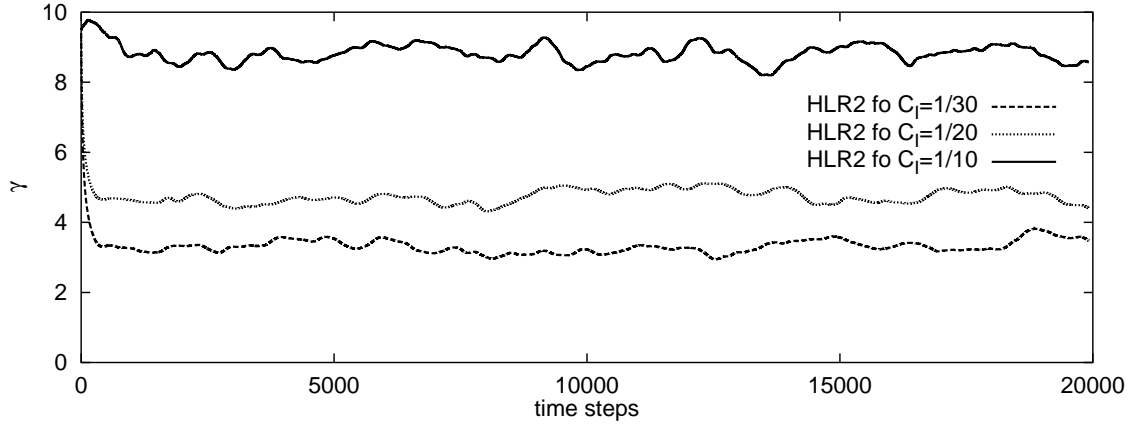


Abbildung 4.23: Verlaufs des Parameters γ für verschiedene C_I -Werte während einer kompletten Berechnung im Kanal auf dem Gitter $24 \times 64 \times 36$

Konform mit dem berechneten Wert von ca. 9 in (4.34) verläuft γ für den Fall $C_I = 1/10$. Für $C_I = 1/20$ ergibt sich aus dieser Formel ein Faktor von 2.25, für $C_I = 1/30$ ein Faktor von 1, jeweils bei $C_s = 0.1$. Aufgrund der groben Auflösung und des damit verbundenen relativ großen Abstandes zwischen den beiden Punkten an der Trennfläche ergeben sich bei den beiden letztgenannten jedoch trotzdem größere Werte für γ , so dass auch im Fall von $C_I = 1/30$ der zwar geringe, aber doch vorhandenen Sprung mittels des forcing ausgeglichen werden kann. Diese Situation wird in Abb. 4.24 dargestellt:

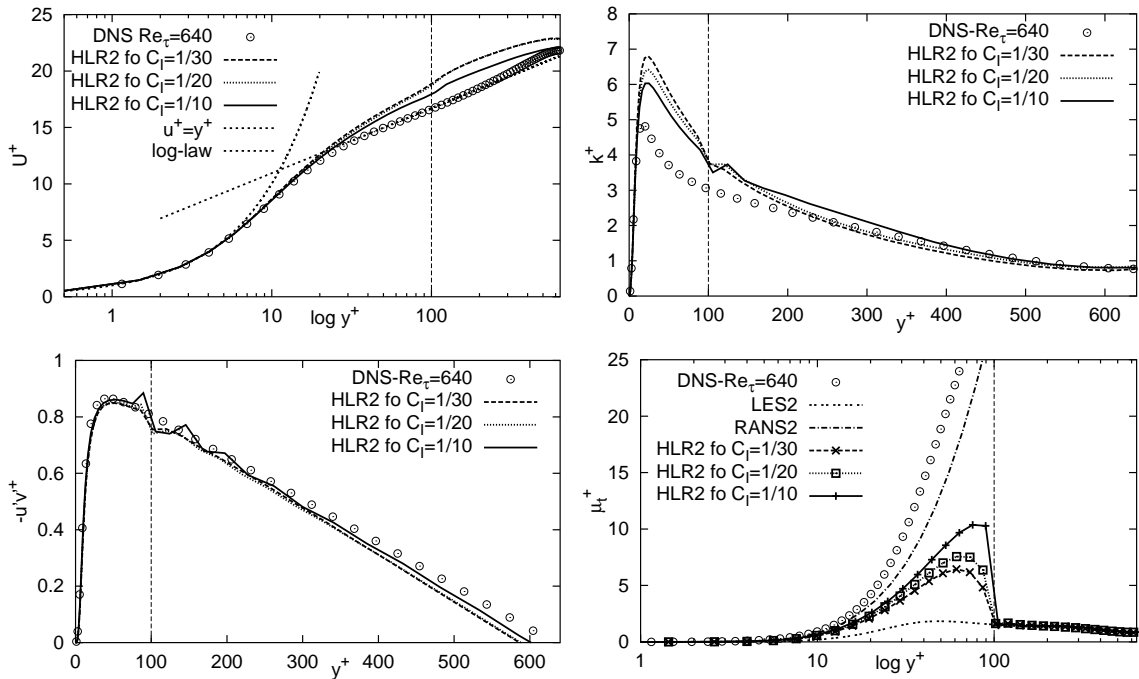


Abbildung 4.24: Forcing bei verschiedenen Werten für C_I im Kanal mit $y_{ifce} = 0.017$ auf dem Gitter $24 \times 64 \times 36$

Dabei erkennt man, dass aufgrund der geringeren modellierten Viskosität im RANS-Gebiet die endgültige Abweichung im mittleren Profil mit sinkendem C_I steigt. Ruft man sich nun den Verlauf der mittleren Geschwindigkeit der gekoppelten Berechnung ohne blending in Erinnerung (Abb. 4.7, Seite 72), dann kommt man sofort auf die Idee, forcing ohne blending zu verwenden, denn der Verlauf im RANS-Gebiet ist dort zumindest für den Kanal sehr gut. Es zeigt sich jedoch, dass die Dämpfung durch die hohe Viskosität so stark ist, dass die künstlichen superstreaks mit der vorgeschlagenen Stärke des forcing nicht aufgebrochen werden können. Eine Besserung im mittleren Geschwindigkeitsprofil tritt nur bei einer extremen Verstärkung des Faktors γ ein, wodurch allerdings alle Spannungen, die Fluktuationen in der forcing-Richtung beinhalten, unbrauchbar werden.

Die Verwendung des impliziten blending ist somit wesentlich für die Etablierung der Gesamtmethode, wobei $C_I = 1/10$ zumindest für die Kanalströmung mit forcing der beste Faktor zu sein scheint. Gegenüber der Berechnung ohne forcing und vor allem gegenüber LES auf dem gleichen Gitter zeigt sich damit insgesamt eine deutliche Verbesserung (Abb. 4.25). Da bei beiden hybriden Methoden der gleiche C_I -Wert verwendet wird, bleibt der Unterschied in der turbulenten Viskosität, welche repräsentativ für den modellierten Anteil ist, gering. Dadurch, dass der aufgelöste Anteil mit forcing ebenfalls sprunghaft verändert wird, zeigt sich jedoch eine deutliche Reduktion der Sprünge in den Spannungen, vor allem bei k und $\overline{u'u'}$. Doch auch in der turbulenten Scherspannung $\overline{u'v'}$ wird auf LES-Seite eine deutliche Verminderung des Sprunges sichtbar. Anhand der Scherspannung erkennt man auch die mit forcing wesentlich genauere Bestimmung der Wandschubspannung bzw. der Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ , denn der Schnittpunkt der Kurven mit der Abszisse berechnet sich aus $h u_\tau / \nu$ und muss gemäß der Reynoldszahl bei 640 liegen. Da h und ν für das Problem fest sind, kann nur eine Unterschied in u_τ eine Abweichung in der Position des Nulldurchganges hervorrufen. Bei der Dissipation ε ist kein gravierender Unterschied zwischen dem Einsatz von und Verzicht auf forcing zu erkennen. Allerdings zeigt sich gut der Unterschied zur groben LES, welche die Dissipation in dem für hybride Rechnungen dort vorliegenden RANS-Gebiet zunächst zu groß berechnet, die stetige Erhöhung zur Wand hin aber nicht richtig erfassen kann. Wegen der hohen Dämpfung der Fluktuationen in diesem Gebiet bei HLR ist dies dort ebenfalls nicht möglich. Eine wichtige Beobachtung, die bei den Untersuchungen zum forcing gemacht werden kann, ist die Tatsache, dass es auch bei Berücksichtigung von zusätzlichen Skalaren als Primärgrößen, also z.B. Temperatur oder Mischungsgrad, ausreichend ist, forcing nur in der Impulsgleichung zu integrieren. Der Sprung im mittleren Temperatur- bzw. Mischungsgradverlauf, der ohne forcing auch hier auftritt, wird analog dem im Geschwindigkeitsprofil vermindert, was in unteren linken Bild der Abbildung 4.25 zu erkennen ist. Es ist also kein zusätzliches forcing für diese Größen nötig, was wiederum die Aussage von Baggett [3] über den wandnormalen Impulstransport bestätigt. Ist dieser durch forcing sozusagen wieder reaktiviert, stellt sich auch automatisch der richtige Skalartransport ein. Der Reynoldsfluss $\overline{v'T'}$ zeigt ein ähnliches Verhalten wie die Scherspannung $\overline{u'v'}$. Der Sprung in den Profilen der hybriden Rechnungen ist hier jedoch etwas stärker ausgeprägt.

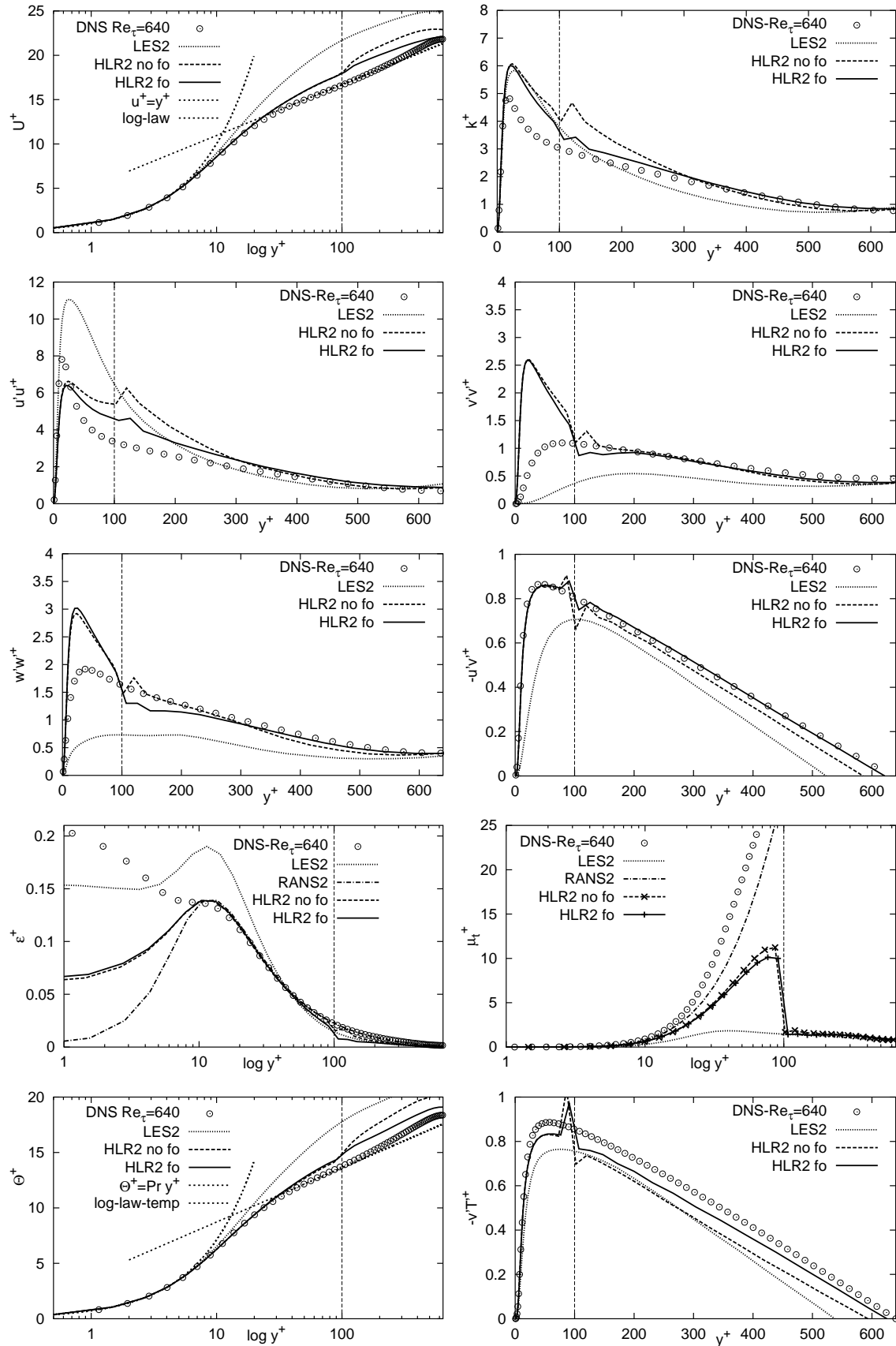


Abbildung 4.25: Vergleich von Berechnungen mit und ohne forcing im Kanal auf dem Gitter 24 x 64 x 36

Weiterhin stellt es sich als ausreichend heraus, direkt am Interface, genauer im ersten Punkt auf LES-Seite hinter dem Interface, die Quellterme einzubringen. Mehrere Versuche mit forcing über bestimmte Intervalle um das Interface herum zeigten hauptsächlich eine Erhöhung des Aufwands, nicht aber eine Verbesserung der Ergebnisse. Im Hinblick auf die doch recht aufwändige Prozedur zur Erzeugung der Fluktuationen stellt das einen großen Rechenzeitgewinn dar. Die Auswirkungen des forcing sind im Kanal, der quasi das Paradebeispiel für wandgebundene Strömungen darstellt, mit Abstand am deutlichsten zu erkennen. Bei komplexeren Konfigurationen ist der Einfluss geringer, aber immer noch sichtbar. Auf Einzelheiten dazu wird im Kapitel der Testfälle eingegangen.

4.4.4 Art und Position der Trennfläche

Einer der Vorteile der zonalen hybriden LES/RANS-Verfahren ist die Möglichkeit, die Position des Interface selbst und größtenteils unabhängig vom numerischen Gitter festlegen zu können. Die dadurch erreichte Flexibilität zeigt vor allem im Falle unbekannter Strömungskonfigurationen, bei denen im voraus nicht ersichtlich ist, wie der Strömungsverlauf aussehen wird, Vorteile. Auch bei sich ändernder Strömung, aber gleichbleibender Geometrie, wie es z. B. bei Problemen der Strömungskontrolle durch Einblasung oder Absaugung vorkommt, lässt sich trotz unterschiedlicher Grenzschichtdicken immer noch das gleiche Gitter verwenden. Ein weiterer Aspekt, der diesen Vorteil gegenüber nahtlosen Verfahren, wie z.B. der Detached-Eddy Simulation (DES), bei welcher die Festlegung der Interface-Position bereits mit Erzeugung des Berechnungsgitters geschieht, verdeutlicht, wird bei Gitterverfeinerungsstudien zur Abschätzung der Qualität der Lösung deutlich. Hier kann trotz Verfeinerung bzw. Vergröberung des Gitters die Position der Trennfläche konstant gehalten werden.

Diese Flexibilität kann jedoch für den Benutzer ein zusätzliches Problem darstellen, denn die Bestimmung der Position kann gerade in den oben aufgeführten Konfigurationen mitunter sehr schwierig sein. Dabei hat die Position der Trennfläche jedoch entscheidende Bedeutung für die Güte der Lösung eines hybriden LES/RANS-Verfahrens, wie anhand Abb. 4.26 demonstriert wird. Zu sehen ist der Druckbeiwert für zwei unterschiedliche Interface-Positionen bei gleichem Verfahren und gleichem Gitter für die dreidimensionale Hügelströmung. Man erkennt deutlich die starke Abweichung der Berechnung mit großem RANS-Gebiet ($y^+ = 1500$) im hinteren Bereich des Hügels. Die Ursache dafür liegt darin, dass die Trennfläche sich so weit im Gebiet befindet, dass eine zu starke Dämpfung der Fluktuationen auftritt, wodurch das RANS-Gebiet die LES-Anregungen nicht mehr aufnehmen kann. Die RANS-Region fungiert nicht länger als Wandmodell, sondern bestimmt zum Großteil die Lösung im Gesamtgebiet mit, so dass sich die auch bei reinen RANS-Rechnungen für diesen Fall typische viel zu große Rückströmzone hinter dem Hügel ausbildet. Genau diese verzögert den Druckrückgewinn in der in Abb. 4.26 dargestellten Weise.

Damit das hybride Verfahren seine Flexibilität behält und auf jede Strömungskonfiguration reagieren kann, muss die Position des Interface demnach variabel gestaltet

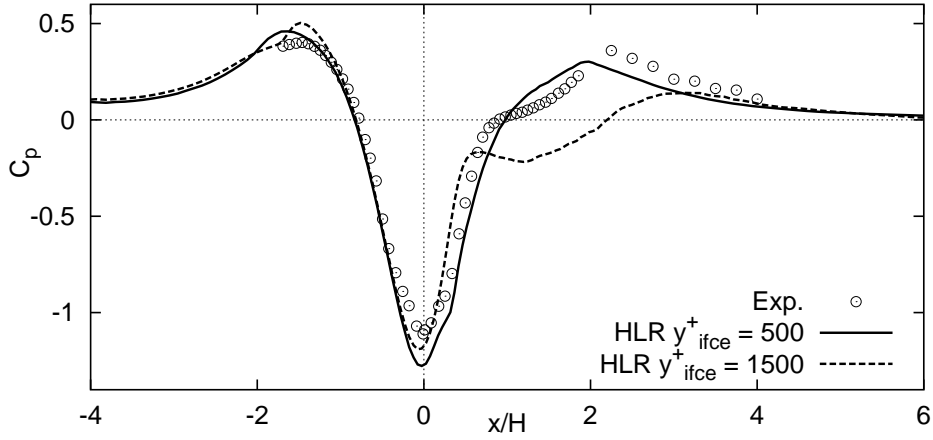


Abbildung 4.26: Druckbeiwert für zwei verschiedene Interface-Positionen des hybriden LES/RANS-Verfahrens im Fall der Umströmung des dreidimensionalen Hügels

werden und zwar in der Art, dass sie sich im Laufe der Rechnung automatisch auf die Strömung anpassen kann. Wichtig für die Konsistenz des Modells ist, dass die beiden Grenzfälle, 100% RANS und 100% LES bzw. DNS, theoretisch erreicht werden können. Übertragen auf das Interface bedeutet dies, dass die Trennfläche mit höherer Gitterauflösung immer näher an die Wand rücken muss und im Grenzfall schließlich komplett verschwindet. Bei gröberer Auflösung hingegen bewegt sie sich immer weiter ins Strömungsgebiet hinein, bis das LES-Gebiet schließlich komplett verschwindet. Realisiert wird dies mit Hilfe einer Regeleinrichtung, deren Regelgröße k^* , der Prozentsatz des modellierten Anteils an der gesamten turbulenten kinetischen Energie auf der LES-Seite des Interface, ist:

$$k^* = \left\langle \frac{k_{mod}}{k_{mod} + k_{res}} \right\rangle \quad (4.41)$$

Der Mittelungsoperator „ $\langle \rangle$ “ bedeutet in diesem Fall eine Mittelung über alle Kontrollvolumen, die zum Interface gehören und ist aus Gründen der Stabilität des Verfahrens eingebaut. Der Einfluss des Gitters und damit der Auflösung ist im Term k_{mod} versteckt, der nach Gleichung (4.29) bestimmt wird. Der aufgelöste Anteil wird direkt mit Hilfe der Fluktuationen berechnet.

$$k_{res} = \frac{\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}}{2} \quad (4.42)$$

Das Interface wird nun so positioniert, dass k^* und damit der modellierte Anteil unter einer bestimmten Grenze k^*_{grenz} bleibt, welche durch den Benutzer festgelegt werden kann. Ein typischer Wert für den Grenzwert liegt in Übereinstimmung mit Anhaltswerten zu Auflösungen einer LES bei $k^*_{grenz} \approx 20\%$ (vgl. Pope [53]). Wird dieser Wert überschritten, ist dies gleichbedeutend mit einer zu groben Auflösung für den LES-Teil und die Trennfläche wird weiter von der Wand weggerückt, das RANS-Gebiet also vergrößert. Im umgekehrten Fall eines kleineren Wertes für k^*

wird das Interface näher an die Wand gerückt. Der dafür gewählte relativ einfache Regelmechanismus sieht im Detail folgendermaßen aus:

1. Im ersten Schritt wird die Abweichung des berechneten k^* -Wertes vom Sollwert k_{grenz}^* bestimmt.

$$\Delta k^* = k_{grenz}^* - k^* \quad (4.43)$$

2. Danach wird der jeweilige Schalter (z.B. y_{ifce}^+) mit der Abweichung multipliziert. Damit sich die Strömung auf die neue Position einstellen kann, wird dies nicht jeden Zeitschritt, sondern nur in einem bestimmten Intervall durchgeführt. Standardmäßig wird nur jeder fünfte Zeitschritt berücksichtigt.

$$y_{ifce}^+ = y_{ifce}^+ (1 - \Delta k^*) \quad (4.44)$$

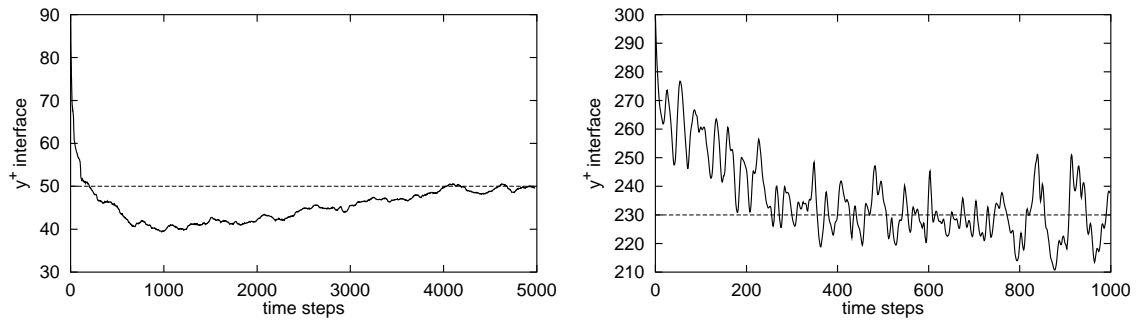


Abbildung 4.27: Verlauf der Interface-Position für eine Kanalströmung (links) und für die Strömung über eine zurückspringende Stufe

Abbildung 4.27 gibt einen Eindruck davon, wie der Regelmechanismus in verschiedenen Konfigurationen arbeitet. Ausgehend von einem Startwert stellt sich mit der Zeit entsprechend des vorgegebenen k_{grenz}^* eine bestimmte Position ein. Je nach Komplexität und/oder Instationarität der Strömung muss das kein eindeutiger Wert sein. Wie Abb. 4.27 rechts zeigt, ist es möglich, dass die Position um einen Wert herum oszilliert. Wie bereits angesprochen, ist dieser Regelmechanismus so gestaltet, dass die beiden Grenzfälle - RANS und LES bzw. DNS - erreicht werden können. Da im Rahmen dieses hybriden Verfahrens RANS jedoch als Wandmodell für LES verstanden wird, ist es in der praktischen Anwendung nicht sinnvoll, mit einem sehr feinen Gitter das DNS-Limit oder mit einem sehr groben Gitter das RANS-Limit zu erreichen. Aus diesem Grund sind eine obere und eine untere Grenze im Programm eingebaut, nach deren Über- bzw. Unterschreitung die Position der Trennfläche nicht mehr verändert wird. Die obere Grenze wird aktiv, wenn mehr als die Hälfte aller Gitterpunkte mit RANS berechnet wird, die untere, wenn weniger als ein zwanzigstel aller Gitterpunkte mit RANS berechnet wird.

Eine Fragestellung, die noch geklärt werden sollte, ist der Einfluss des Abstandes zur Trennfläche zur Bestimmung der einzelnen k^* -Werte. Nimmt man den ersten Punkt auf LES-Seite, dann besteht die Gefahr einer Rückwirkung des RANS-Gebietes auf k^* , so dass möglicherweise eine Rückkopplung entsteht. Abbildung 4.28 zeigt die sich

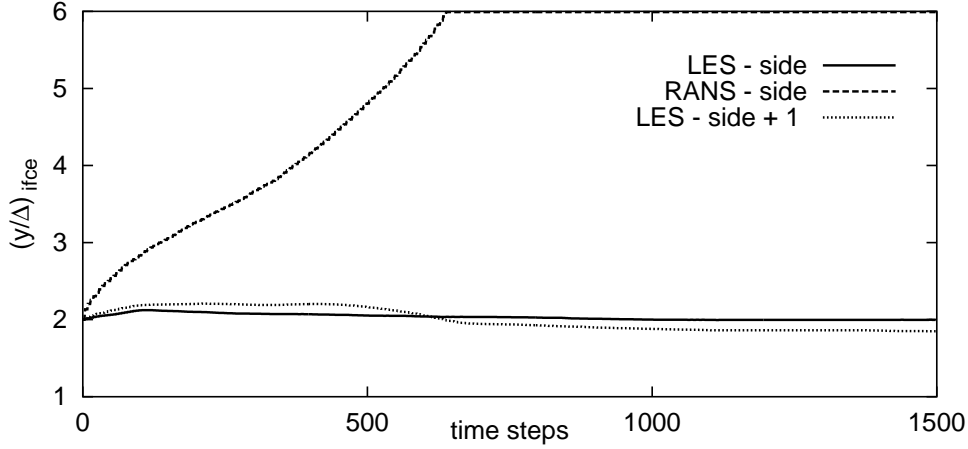


Abbildung 4.28: Vergleich der Regelungsverläufe für die Positionen zur Bestimmung von k^* auf RANS-Seite der Trennfläche, auf LES-Seite und auf dieser Seite eine Zelle weiter ins LES-Gebiet hinein (+1) im Fall der periodischen Hügel

einstellenden Regelungsverläufe für die Positionen auf RANS-Seite der Trennfläche, auf LES-Seite und auf LES-Seite eine Zelle weiter ins LES-Gebiet hinein (+1). Im Gegensatz zu Abb. 4.27 wird für die hier beispielhaft gezeigte Strömung über die periodischen Hügel als Schalter y/Δ mit Startwert zwei verwendet. Es wird ersichtlich, dass der Unterschied zwischen den beiden Punkten auf LES-Seite gering ist. Der Punkt weiter weg von der Trennfläche zeigt zu Anfang überraschenderweise sogar einen größeren y/Δ -Wert als derjenige direkt am Interface an, sinkt aber nach einiger Zeit doch auf einen niedrigeren Wert ab. Dies entspricht der Vorstellung, dass der modellierte Anteil und damit k^* dort etwas geringer ist und die Trennfläche damit näher an der Wand positioniert wird. Eine befürchtete Rückkopplung bleibt jedoch aus. Im Fall des Punktes auf der RANS-Seite ist diese jedoch eindeutig zu erkennen, denn ungeachtet der Verschiebung der Trennfläche wird dort durch den hohen modellierten Anteil immer ein großer k^* -Wert erreicht, so dass die Regelung an den Anschlag gefahren wird (mehr als die Hälfte der Gitterpunkte werden mit RANS berechnet). Dieser liegt in diesem Fall bei $y/\Delta \approx 6$. Ein ähnliches Verhalten wie bei der Strömung über die periodischen Hügel ist auch bei den anderen Testfällen zu beobachten. Da es wie oben gesehen kaum einen Unterschied gibt, programmtechnisch aber wesentlich einfacher ist, den ersten Punkt auf LES-Seite zu verwenden, wird dies der Benutzung des zweiten Punktes auf dieser Seite vorgezogen.

Die Auswirkung unterschiedlicher Positionen der Trennfläche auf die Ergebnisse im Falle der Kanalströmung ist in Abb. 4.29 dargestellt. Dabei wird zunächst $C_I = 1/30$ gewählt, was bei unendlich hoher Auflösung einer Gleichheit der modellierten Viskositäten auf beiden Seiten der Trennfläche entspräche. Im unteren rechten Bild sieht man, wie sich der reale Verlauf einstellt. Die turbulente Viskosität wird entsprechend der Position der Trennflächen bei $y = 0.017, 0.034, 0.051$ bzw. $y^+ \approx 100, 200, 300$ auf den Wert im LES-Gebiet reduziert. Mit zunehmender Dicke des RANS-Gebietes wird aufgrund der begrenzten Auflösung der Sprung vom letzten Punkt

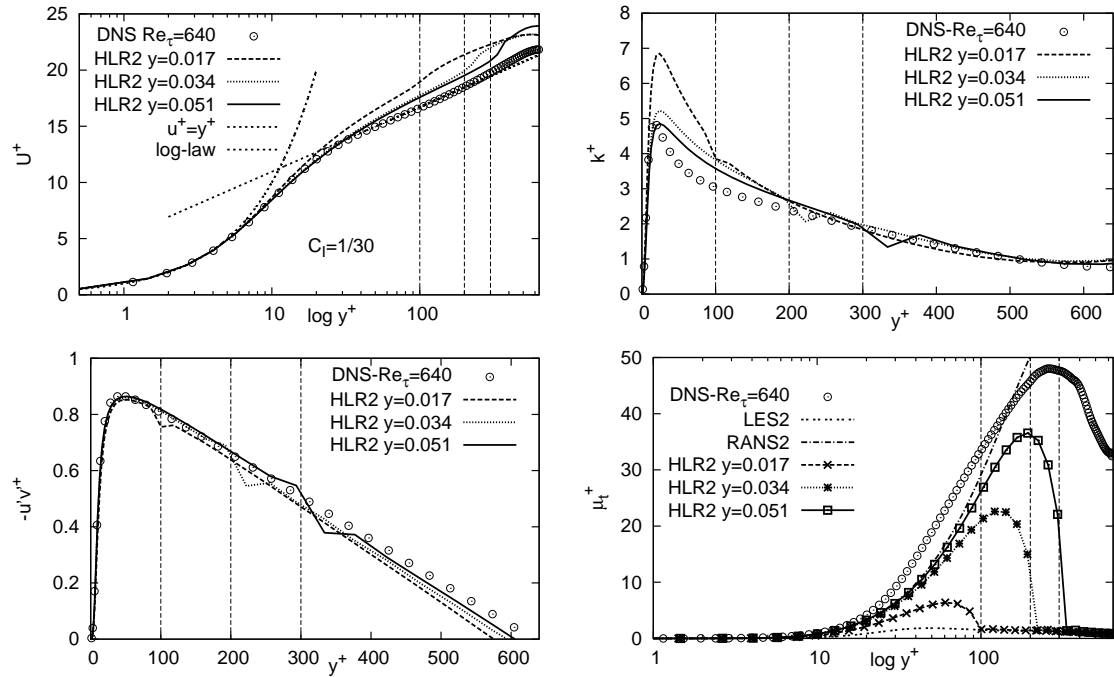


Abbildung 4.29: Verschiedene Positionen der Trennfläche bei der Kanalströmung mit $C_I = 1/30$ auf dem Gitter $24 \times 64 \times 36$

auf RANS-Seite zum ersten Punkt auf LES-Seite immer deutlicher, was sich auch im mittleren Geschwindigkeitsprofil und den Spannungen durch größere Sprünge bemerkbar macht. Die Position mit $y^+ \approx 300$ scheint von den Verläufen her am besten von den dreien zu sein, was daran liegt, dass das Ergebnis zum Großteil aus der RANS-Lösung bestimmt wird, welche gerade für Kanalströmungen kalibriert ist. Bei dieser Position wird jedoch ca. die Hälfte der Geometrie und weit mehr als die Hälfte der Gitterpunkte mit RANS berechnet, was nicht der Verwendung von RANS als Wandmodell für LES entspricht, in diesem Fall jedoch erfolgreich ist. Bei Verwendung von $C_I = 1/10$ stellt sich ein leicht unterschiedliches Bild dar (Abb. 4.30). Der Größte Unterschied ist bei $y = 0.017$ zu verzeichnen, da sich die unterschiedliche Vorgabe der Randwerte für k und ε hier am deutlichsten auswirkt. Je weiter die Trennfläche von der Wand wegrückt, desto kleiner wird der Unterschied zwischen den Kurven mit unterschiedlichen C_I .

Die wichtigste Frage neben der Position der Trennfläche ist die der Art der Positionierung. Damit gemeint ist die Frage nach dem genauen Verlauf des Interface bei einer festen Position gemäß k^* , bzw. nach dem Schalter, der im Programm RANS- und LES-Gebiet unterscheidet. Diese Fragestellung wurde bereits am Anfang der gekoppelten Berechnungen (S. 69) angesprochen und die dort aufgelisteten Kriterien - gute Isofläche, Allgemeingültigkeit und Flexibilität - haben nach wie vor Bestand. Im Verlauf der Arbeit wurden folgende Schalter getestet:

- **y**: Der nur aufgrund seiner Eigenschaft der klaren Trennung zwischen den Teilgebieten anfangs gewählte physikalische Wandabstand ist für komplexe

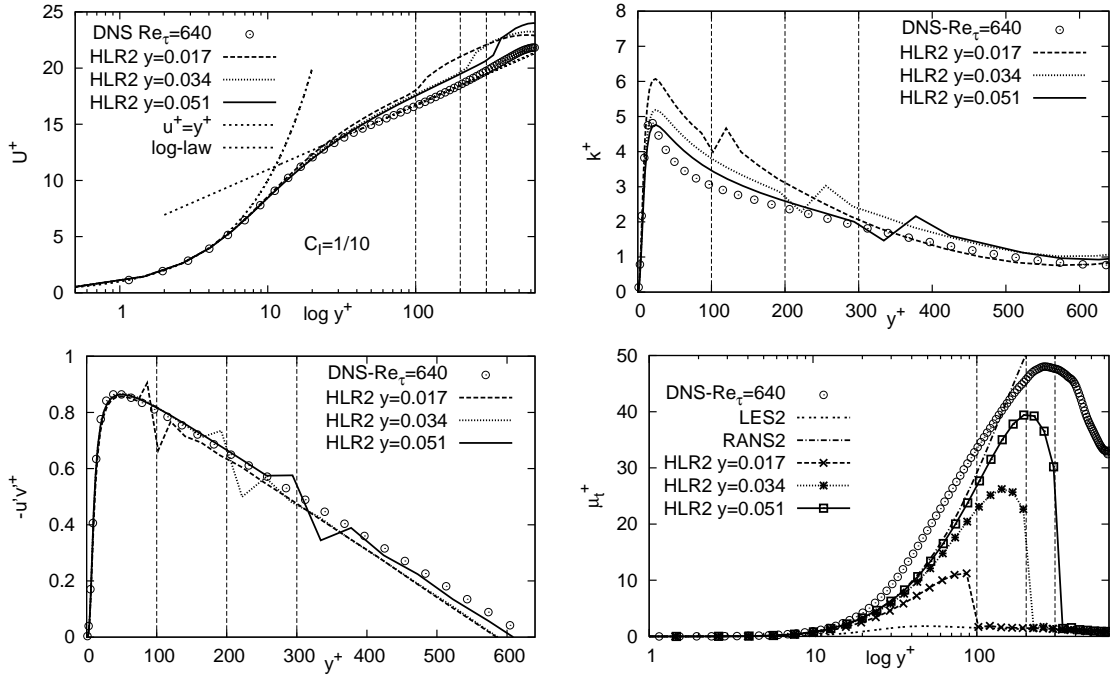


Abbildung 4.30: Verschiedene Positionen der Trennfläche bei der Kanalströmung mit $C_I = 1/10$ auf dem Gitter $24 \times 64 \times 36$

Geometrien denkbar ungeeignet. Man stelle sich eine Konfiguration vor, bei der, ähnlich einer Brennkammer, in der von einer kleinen Geometrie mit hohen Geschwindigkeiten plötzlich auf eine große Geometrie mit kleinen Geschwindigkeiten expandiert wird. Durch die starke Vergrößerung der räumlichen Skala und aufgrund der wegen der langsameren Geschwindigkeit wesentlich dickeren Grenzschicht muss das Interface in physikalischen Koordinaten nach der Expansion viel weiter von der Wand weg liegen, als vor der Expansion. Um dieses mit dem Kriterium „Allgemeingültigkeit“ beschriebene Problem zu umgehen, bietet es sich an, dimensionslose Werte als Schalter zu verwenden.

- y/Δ : Dieser Schalter, der direkt am oben beschriebenen Problem ansetzt, benutzt die ebenfalls für die makroskopische räumliche Skala repräsentative Filterweite Δ , um den physikalischen Wandabstand dimensionslos zu machen und hebt damit den Einfluss der Skala auf. Bei einem äquidistanten Gitter würde dieser Schalter, der dem Schalter der DES entspricht, angeben, wie viele Zellen an der Wand im RANS-Gebiet liegen. Durch die i. A. Verdichtung der Zellen zur Wand hin liegt das Interface jedoch bei gleicher Zellenzahl im RANS-Gebiet weiter weg, bzw. es liegen tendenziell mehr Zellen in diesem Gebiet, als der Wert des Schalter angibt (Abb. 4.31). Ein Wert, mit dem vernünftige Ergebnisse erzielt werden konnten, liegt bei $y/\Delta \approx 3$, welcher auch als Standard- bzw. Startwert verwendet wird. Es ist weiterhin interessant an dieser Stelle anzumerken, dass mit einem Wert der Konstanten im DES-Modell von $C_{DES} = 0.65$ quasi ein Wert von 1.5 für diesen Schalter vorgegeben wird.

Allerdings bestimmt sich Δ in diesem Fall aus dem Maximum der Kontrollvolumenseiten, nicht aus dem Mittelwert, so dass dieser Wert nicht direkt vergleichbar ist.

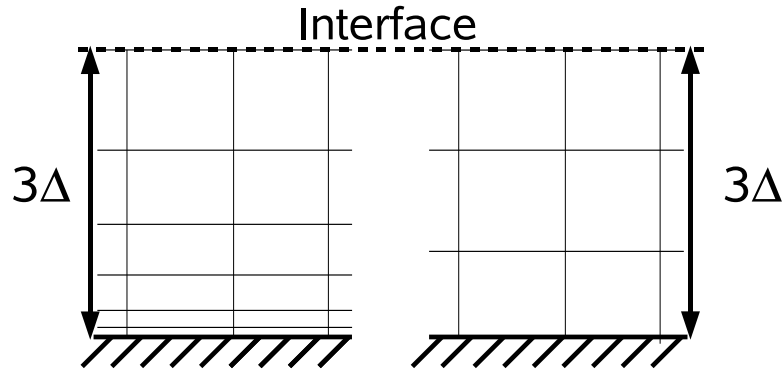


Abbildung 4.31: Skizze zum Schalter y/Δ

- $y^+ = y u_\tau / \nu$: Das Praktische an diesem Schalter ist seine direkte Kopplung an die Grenzschicht. Unabhängig von der Reynoldszahl kann man mit Hilfe dieses Wertes sehen, in welchem Teilgebiet der Grenzschicht (viskose Unterschicht, Übergangsbereich, logarithmischer Bereich) man sich befindet. Voraussetzung dafür ist die Existenz einer Gleichgewichtsgrenzschicht, was natürlich nicht immer der Fall ist, aber der Wert hat trotzdem eine gewisse Aussagekraft. Der Grund, warum diese Variable ungern in Modellen benutzt wird, ist die Tatsache, dass in Gebieten verschwindender Wandschubspannung, also in Ablöse- und Wiederanlegepunkten, die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ und damit auch $y^+ = 0$ ist. Eine Isolinie $y^+ = konst.$ würde also theoretisch bei einem unendlich großen Wert des physikalischen Abstandes y verlaufen. In Wirklichkeit ist es allerdings so, dass diese Problempunkte keine einzelnen Punkte sind, sondern Bereiche einer bestimmten Ausdehnung, die nur durch die zeitliche Mittelung zu Punkten werden. Außerdem geht in die Berechnung von u_τ der Betrag des Wandschubspannungsvektors ein, so dass in der Praxis nie wirklich der Wert Null auftritt und somit auch keine großen Probleme auftreten sollten. Diese wurden bei Testrechnungen auch nicht angetroffen. Auch die weit verbreitete Verwendung der Van Driest'schen Dämpfungsfunktion, in der ebenfalls y^+ vorkommt, zeugt davon, dass das y^+ -Problem hauptsächlich theoretischer Natur ist. Als vernünftiger Wert hat sich $y^+ \approx 100$ erwiesen, der wiederum als Standard gesetzt wird.
- $Re_t = k^2 / (\nu \varepsilon)$: Dieser zu Anfang recht vielversprechend scheinende Schalter der turbulenten Reynoldszahl, welcher ohne y^+ auskommt, erwies sich im Laufe der Untersuchungen als unpraktisch. Der Grund dafür ist eine trotz Dimensionslosigkeit relativ starke Abhängigkeit der Werte vom betrachteten Strömungsproblem. Für die schon häufig gezeigte Kanalströmung stellte sich z.B.

ein Wert von $Re_t \approx 50$ als passend heraus. Bei der Strömung über ein Flügelprofil befand sich eine sinnvolle Isofläche dafür im Bereich von $Re_t \approx 10000$. Über die automatische Regelung würde der Wert natürlich angepasst, aber zum einen gestaltet sich so die Vorgabe eines vernünftigen Startwertes schwierig, zum anderen ist es mit diesem Schalter unter Umständen möglich auch unerwünschte RANS-Bereiche innerhalb des LES-Kerngebietes zu erzeugen.

- **k^* :** Schließlich ist es auch möglich, direkt den Parameter k^* als Schalter zu verwenden. Das hat den Vorteil, dass man sich den Umweg über einen der oben genannten Schalter erspart und auch die Regelung wegfallen kann, da die Regelgröße direkt eingesetzt wird. Allerdings kommt hier das Problem zum Tragen, dass für die Berechnung des Parameters, genauer gesagt der Gleichung (4.42), eine online-Mittelung durchgeführt werden muss. Im Fall der anderen Schalter kann die Rechnung (bei Verzicht auf die Regelung) auch ohne online-Mittelung laufen, was auch nach dem Auffinden der richtigen Position der Trennfläche meist gemacht wird. Auch beim Starten einer Rechnung ist es unpraktisch, mit diesem Schalter zu rechnen, da sich ein realistischer Wert für k^* erst nach einer Reihe von Zeitschritten einstellt. Wird dieser Wert zur Positionierung der Trennfläche benutzt, welche wiederum stark das Ergebnis beeinflusst, so entsteht eine starke Kopplung, die sich negativ auf die Stabilität der Methode auswirkt.
- **f :** In Verbindung mit Berechnungen unter Benutzung des k - ε - ζ - f -Modells kann auch die elliptische Relaxationsfunktion f als Schalter verwendet werden. Durch die Eigenschaft dieser wanddetektierenden Funktion eines negativen Wertes an der Wand bietet sich Null als Standard- und Startwert an. Allerdings kann der Nulldurchgang bei hohen Reynoldszahlen sehr nahe an der Wand (im Bereich der ersten zwei Zellen) liegen. Im weiteren Verlauf steigt f bis zu einem Maximalwert an, um dann auf einen positiven, aber nahe bei Null liegenden Wert abzufallen. Dadurch ergeben sich zweideutige Positionen für Werte größer Null, womit diese zur Festlegung ausscheiden.

Im Programm sind alle der oben genannten Schalter eingebaut und können auch verwendet werden. Aus den dargestellten Gründen finden jedoch hauptsächlich y/Δ und y^+ Anwendung. Da es sich bei den Testfällen meist um einfachere Geometrien handelt, wird dort teilweise auch mit y gearbeitet. Einen wesentlichen Unterschied gibt es im Prinzip nur zwischen den Schaltern, die sich im Lauf der Berechnung ändern und denen, die durch das Gitter schon vor der Rechnung festgelegt werden. Stellvertretend sind in Abb. 4.32 y^+ und y/Δ dargestellt. Im gemittelten Profil der Geschwindigkeit ist nur ein geringer Unterschied feststellbar. Im Fall der vorher festgelegten Trennfläche (y/Δ) liegt die Geschwindigkeit zwischen $30 < y^+ < 100$ etwas niedriger als diejenige mit y^+ als Schalter. In den anderen drei Diagrammen ist der Unterschied deutlicher zu erkennen. Bedingt durch die Abhängigkeit von der Strömung, verläuft das Interface im Fall des y^+ -Schalters auch im Kanal nicht exakt entlang einer Linie, sondern variiert um ca. eine Zelle noch oben oder unten

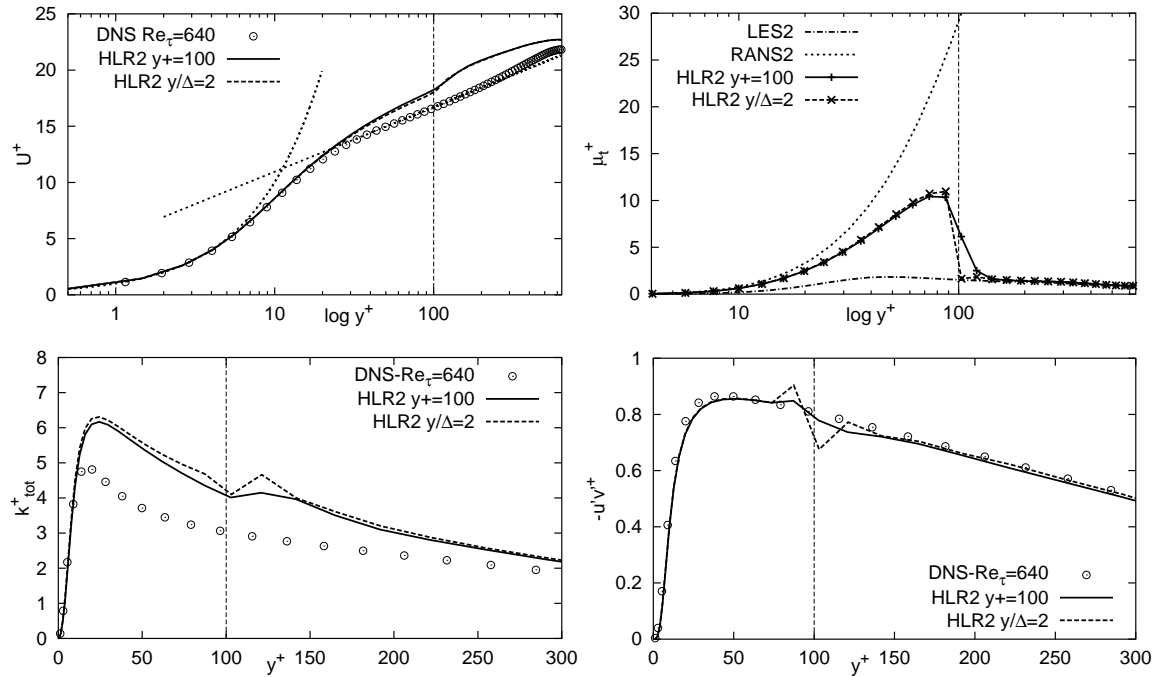


Abbildung 4.32: Vergleich der Ergebnisse verschiedener Schalter auf dem Gitter 24 x 64 x 36

sowohl räumlich, als auch zeitlich gesehen. Durch die für die Auswertung durchgeführte Mittelung, werden die Sprünge verschmiert. So kommt es, dass der Verlauf der Spannungen wesentlich glatter aussieht und die turbulente Viskosität direkt an der Trennfläche einen Wert aufweist, der genau in der Mitte der beiden unterschiedlichen Niveaus links und rechts des Interface liegt.

Um das Verhalten der Interface-Fläche genauer zu verdeutlichen, ist in Abb. 4.33 beispielhaft für die Kanalströmung und eine Stufenströmung der Parameter k^* jeweils entlang der als Schalter verwendeten Isofläche y^+ bzw. y , normiert mit der charakteristischen Höhe der Konfiguration, dargestellt. Bedient man sich bei der Kanalströmung des Schalters y , dann entspricht die so entstandene Interface-Fläche

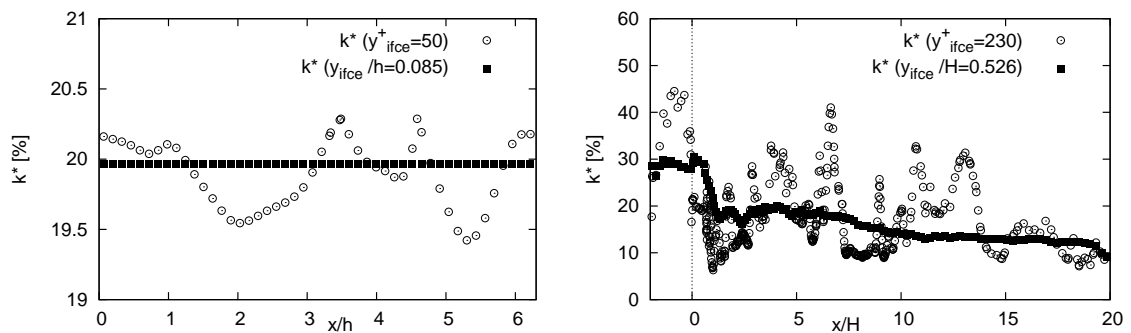


Abbildung 4.33: Parameter k^* entlang der Isoflächen y^+ bzw. y (normiert) für die Kanalströmung (links) und für die Strömung über eine zurückspringende Stufe

sehr genau der Isofläche $k^* \approx 20$. Bei der Benutzung von y^+ ist das aufgrund der mit Zeit und Ort variablen Schubspannungsgeschwindigkeit nicht mehr gegeben, die Abweichungen bewegen sich jedoch in einem kleinen Bereich. Anders ist das bei der Stufenströmung. Alleine schon dadurch, dass die Strömungsrichtung keine homogene Richtung mehr darstellt, ist $k^* \approx 20$ nur noch im Mittel erfüllt, je nach Strömungsregion (Einlauf, Rückströmgebiet, Auslassgebiet) ergibt sich ein größerer oder kleinerer Wert. Gänzlich unregelmäßig sieht der Verlauf aus, wenn man anstatt des physikalischen den dimensionslosen Abstand verwendet, der vorgegebene Wert wird im Mittel jedoch erreicht.

4.4.5 Kombination mit anderen Modellen

Ein weiterer Vorteil der zonalen hybriden Verfahren besteht in der Flexibilität, unterschiedlichste Verfahren sowohl auf RANS-, als auch auf LES-Seite miteinander zu koppeln. Die einzige Einschränkung, die diesbezüglich bis jetzt in der Arbeit gemacht wurde, ist, wie bereits am Anfang des Kapitels erklärt und gerechtfertigt, die ausschließliche Benutzung von Modellen, die die turbulente Viskosität zur Bestimmung der Reynoldsspannungen verwenden (Boussinesq-Ansatz). In den bisher gezeigten Ergebnissen wurde jedoch lediglich das Smagorinsky-Modell mit dem Chien-Modell gekoppelt. Dies liegt daran, dass diese beiden Modelle zu Beginn der Arbeit schon als Einzelmodelle im verwendeten Code FASTEST vorhanden waren und somit die meisten Grundlagenuntersuchungen mit diesen beiden realisiert wurden. Im Verlauf der Arbeit wurden jedoch weitere Modelle implementiert, um gerade auch andere Kombinationen zu untersuchen. Somit stehen auf **RANS-Seite** folgende Modelle zur Verfügung:

- das Chien k - ε -Modell (in FASTEST vorhanden)
- das Launder-Sharma k - ε -Modell (neu implementiert)
- ein auf der homogenen Dissipation basierendes k - ε -Modell (neu implementiert)
- das aus vier Gleichungen bestehende k - ε - ζ - f -Modell (neu implementiert)

Dabei muss für das letzte Modell noch auf die Abschätzung der Werte bzw. die Randbedingungen am Interface für ζ und f im LES-Gebiet eingegangen werden, da im Abschnitt 4.4.2 nur die Abschätzungen für k und ε genannt wurden. Die wanddetektierende elliptische Relaxationsfunktion f wird im gesamten Gebiet unabhängig von der Position der Trennfläche berechnet. Somit stellt sich das Problem der Randbedingung erst gar nicht. Bei ζ werden mehrere Varianten getestet:

1. Die erste Variante besteht darin, einen zu einem k - ε -Modell konformen Wert zu setzen. Die turbulenten Viskositäten werden in beiden Fällen folgendermaßen bestimmt:

$$\mu_t^{k,\varepsilon} = f_\mu C_\mu^{k,\varepsilon} \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \mu_t^{\zeta,f} = \rho C_\mu^{\zeta,f} \zeta k \tau \quad (4.45)$$

Gleichsetzen der beiden liefert unter der Berücksichtigung von $\tau = k/\varepsilon$ und $f_\mu \approx 1$ im Bereich der Trennfläche:

$$\zeta = \frac{C_\mu^{k,\varepsilon}}{C_\mu^{\zeta,f}} = 0.409 \quad (4.46)$$

Berechnungen mit dieser Variante zeigen gute Ergebnisse. Vergleicht man jedoch den theoretischen Verlauf von ζ im Fall einer Kanalströmung (Abb. 4.34), dann erkennt man, dass der Wert 0.409 im Bereich von $y^+ \approx 100 - 500$ zwar einen guten Wert darstellt, je nach Position des Interface außerhalb dieses Bereiches aber durchaus große Abweichungen auftreten können, zumal es sich bei der Kanalströmung quasi um eine Modellgrenzschicht handelt.

2. Die Idee der zweiten Variante ist es deshalb, den Wert variabel aus der turbulenten Viskosität auf der LES-Seite zu bestimmen, so dass $\mu_t^{RANS} = \mu_t^{LES}$ erreicht wird. Mit (4.45) erhält man daraus:

$$\zeta = \frac{\mu_t^{LES}}{\rho C_\mu^{\zeta,f} k \tau} \quad (4.47)$$

Es stellt sich jedoch heraus, dass durch die Kopplung ζ im Laufe der Rechnung viel zu klein und damit die turbulente Viskosität zu stark gedämpft wird.

3. Aus diesem Grund wird schließlich die letzte Variante verwendet, bei welcher ζ analog zu f im kompletten Strömungsgebiet unabhängig von der Position der Trennfläche gelöst wird. Zwar gehen dann im LES-Gebiet in die Berechnung der Quellterme keine echten RANS-gemittelten Werte ein, aber wie Abb. 4.34 zeigt, stellt sich somit der realistischste Verlauf für ζ ein.

Auf **LES-Seite** stehen die folgenden Modelle zur Auswahl:

- das standard Smagorinsky-Modell (in FASTEST vorhanden)
- das dynamische Smagorinsky (Germano)-Modell (in FASTEST vorhanden)
- das Yoshizawa Eingleichungsmodell für k_{SGS} (neu implementiert)

Eine ausführliche Beschreibung aller Modelle ist im Grundlagenkapitel in den Abschnitten 2.3, S. 27 und 2.4, S. 35 gegeben.

Vier ausgewählte Kombinationen sind in Abb. 4.34 verglichen. Alle wurden auf dem groben Gitter (24 x 64 x 36) und nur unter Benutzung des impliziten blending berechnet, forcing wurde nicht verwendet. Man kann erkennen, dass es durchaus Unterschiede bei den Ergebnissen gibt. Ihre Ursache haben diese Unterschiede fast alle im unterschiedlichen μ_t -Verlauf. Während die Kombinationen von k - ε - ζ - f - und Launder-Sharma-Modell ein vergleichbar hohes Level an turbulenter kinetischer Energie auf der RANS-Seite der Trennfläche aufweisen, liegt die Modellkombination Smagorinsky und Chien etwas niedriger.

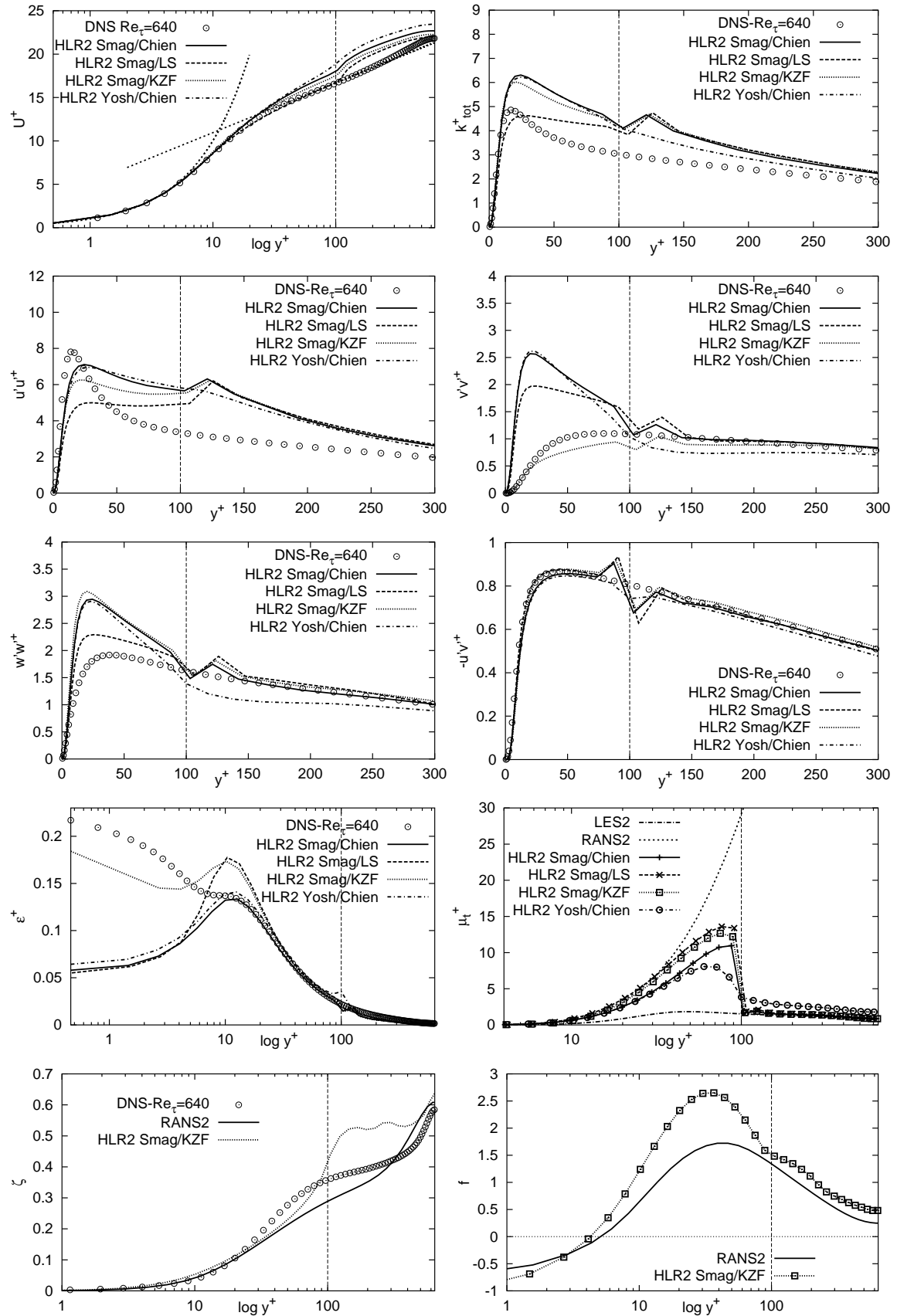


Abbildung 4.34: Vergleich der Ergebnisse verschiedener Modellkombinationen auf dem Gitter $24 \times 64 \times 36$ mit implizitem blending und ohne forcing

Einen sogar nahezu glatten Verlauf zeigt hingegen die Kombination Yoshizawa und Chien. Entsprechend dem Verlauf der turbulenten Viskosität stellt sich auch die Stärke der Sprünge im mittleren Profil und den Spannungen dar, also am schwächsten bei Yosh/Chien und am stärksten bei Smag/LS. Durch die damit ebenfalls verbundene stärkere Dämpfung im RANS-Gebiet bleibt die Überbewertung der Spannungen bei diesem Modell geringer, der aufgelöste Anteil der an der Dissipation ε allerdings auch. Bezüglich der Dissipation stellt die Kombination mit dem k - ε - ζ - f -Modell eine Besonderheit dar, denn als Randbedingung für ε wird im Gegensatz zu den anderen Modellen der physikalische Wandwert verwendet, so dass die Übereinstimmung hier wesentlich besser ist. Gleiches gilt auch für die wandnormale Spannung $\overline{v'v'}$, obwohl trotzdem auch eine kleine Unregelmäßigkeit im Profil zu erkennen ist. Bei komplexeren Strömungen ergeben sich durchaus noch größere Unterschiede unter den Modellkombinationen, wie im Kapitel der Testfälle noch eingehender gezeigt wird.

Ein interessanter Punkt, der bei allen HLR-Ergebnissen im Fall der Kopplung mit dem k - ε -Modell zu beobachten ist, ist die Tatsache, dass trotz des an sich isotropen Charakters dieses Modells bei Annäherung an feste Wände eine Anisotropie der Spannungen sichtbar wird. Während der Maximalwert von $u'u'^+$ bei ca. 6 liegt, betragen die Spitzenwerte der anderen beiden Normalspannungen $v'v'^+$ und $w'w'^+$ lediglich ca. 2.5 bzw. 3. Diese teilweise Erfassung der Anisotropie an der Wand hängt mit der Addition des modellierten und des aufgelösten Anteils der Spannungen zusammen. Während der modellierte Anteil gemäß des Modells isotrop bei $2/3 k$ bleibt, ergeben sich beim aufgelösten Anteil Unterschiede, welche eine teilweise Erfassung möglich machen. Ein Verhalten, das jedoch trotzdem nicht erfassbar wird, ist der genaue Verlauf der wandnormalen Spannungskomponente $v'v'^+$ bzw. $\overline{v'v'}$. Im Gegensatz zu den anderen beiden Normalspannungskomponenten verhält sich diese in unmittelbarer Wandnähe proportional zu $(y^+)^4$, nicht proportional zu $(y^+)^2$. Da sich die turbulente kinetische Energie k in Wandnähe ebenfalls proportional zu $(y^+)^2$ also analog $\overline{u'u'}$ und $\overline{w'w'}$ ändert, trägt der modellierte Teil hier anders als bei $\overline{v'v'}$ zum richtigen Verhalten bei. Dies ist einer der Gründe, warum eine Kopplung mit dem k - ε - ζ - f -Modell realisiert wurde. Einen quantitativen Eindruck über den Grad der Erfassung der Anisotropie kann der sogenannte **Zweikomponentenparameter**

$$A = 1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3) \quad \text{mit} \quad A_2 = a_{ij}a_{ij} \quad \text{und} \quad A_3 = a_{ij}a_{jk}a_{ki} \quad (4.48)$$

geben. A_2 und A_3 stellen dabei die zweite und dritte Invariante des Reynoldsspannungs-Anisotropie-Tensors

$$a_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (4.49)$$

dar. Der Maximalwert von $A = 1$ ist dabei mit Isotropie verbunden. Je weiter A von diesem Wert abweicht, desto anisotroper gestaltet sich der Strömungszustand. Der Verlauf der DNS-Daten in Abb. 4.35 zeigt deutlich die zunehmende Anisotropie bei Annäherung an die Wand. Die feine LES gibt dieses Verhalten sehr gut wieder. Eine RANS-Rechnung mit einem linearen k - ε -Modell zeigt erwartungsgemäß kaum eine Abweichung vom isotropen Zustand. Die dennoch zu sehende Abweichung wird

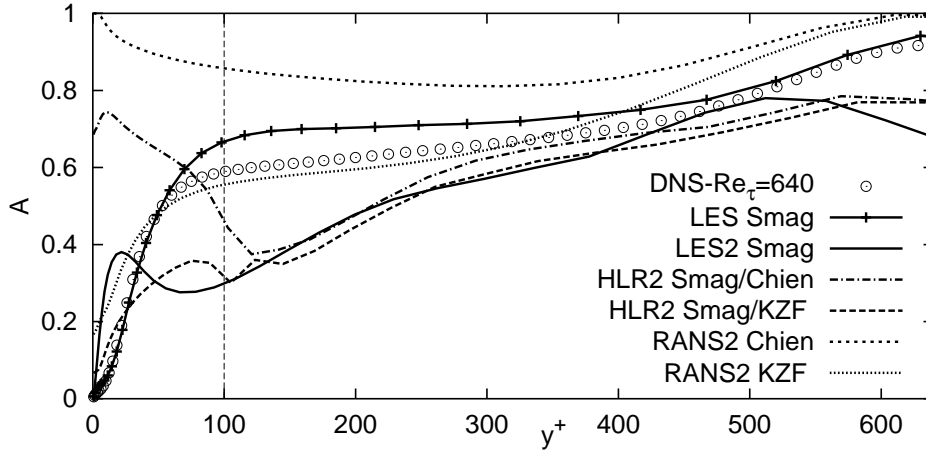


Abbildung 4.35: Zweikomponentenparameter für unterschiedliche Berechnungen einer Kanalströmung bei $Re_\tau = 640$

von der Schubspannungskomponente $\overline{u'v'}$ verursacht. Beim HLR-Modell zeigt sich, wie schon aufgrund der einzelnen Spannungsverläufe vermutet, eine stärkere Anisotropie. Zur Wand hin steigt der Wert von A jedoch trotzdem wieder an, was an der besprochenen Problematik des Verhaltens von $\overline{v'v'}$ liegt. Die Verwendung des k - ε - ζ - f -Modells zur Kopplung beseitigt zwar dieses Problem, allerdings zeigt sich im Bereich von $50 < y^+ < 300$ eine starke Überschätzung der Anisotropie gegenüber der reinen RANS-Rechnung mit diesem Modell. Verursacht wird dies im Wesentlichen durch die Abweichung der Spannung $\overline{u'u'}$ genau in diesem Bereich (vgl. Abb. 4.34). Das gleiche Phänomen ist auch bei der groben LES zu erkennen, welche verfahrenbedingt jedoch den Vorteil hat, die Anisotropie nahe an der Wand besser zu erfassen, als die hybriden Methoden.

Je nach Kombination ändert sich der notwendige Rechenaufwand, denn die Modelle unterscheiden sich sowohl in der Anzahl der zu lösenden Gleichungen, als auch bei der Zahl der zusätzlichen algebraischen Rechenoperationen. Tabelle 4.3 gibt eine Übersicht über die Rechenzeiten in Prozent für einen Iterationsschritt mit der gleichen Anzahl an Kontrollvolumen. Als Referenz (100%) fungiert eine LES mit Standard-Smagorinsky-Modell. Vermerkt ist noch, wieviele zusätzliche Modellgleichungen gelöst werden müssen und wie groß der Unterschied mit und ohne Benutzung der forcing-Methode ist. Da bei der HLR-Methode zusätzliche Gleichungen gelöst werden müssen, ist der Rechenaufwand folglich höher, als der einer reinen LES auf dem gleichen Gitter. Der Vorteil der hybriden Verfahren liegt jedoch darin, für ein gleich gutes Ergebnis ein wesentlich gröberes Gitter verwenden zu können, oder im Umkehrschluss, mit dem gleichen Gitter ein besseres Ergebnis zu liefern.

Auffällig ist zunächst, dass das Modell der homogenen Dissipation langsamer ist als das k - ε - ζ - f -Modell, obwohl zwei Gleichungen weniger gelöst werden. Dieser Trend ist schon am Launder-Sharma-Modell zu erkennen, welches bereits 20% mehr Rechenzeit benötigt als das Chien-Modell. Der Grund dafür liegt in der Anzahl der algebraischen Rechenoperationen. Ein Großteil davon wird bei Launder-Sharma auf

Modell- kombination	zusätzliche Gleichungen	Rechenzeit pro Iteration in %	
		ohne forcing	mit forcing
Smagorinsky	0	100	-
Smagorinsky mit Dämpfung	0	103	-
Germano	0	120	-
Smag/Chien	2	130	135
Smag/LS74	2	150	155
Smag/LShom	2	185	190
Smag/KZF04	4	180	185
Yosh/Chien	2	140	145
Yosh/LS74	2	160	165
Yosh/LShom	2	195	200
Yosh/KZF04	4	195	200
Germ/Chien	2	145	150
Germ/LS74	2	165	170
Germ/LShom	2	200	205
Germ/KZF04	4	195	200

Tabelle 4.3: Vergleich der Rechenzeiten verschiedener Modellkombinationen

die Berechnung der zweiten Ableitung verwendet. Bei der homogenen Dissipation gibt es diesen Term ebenfalls, plus einen zusätzlichen Korrekturterm für die homogene Dissipation. Im Fall des Viergleichungsmodells werden zwar zwei Gleichungen mehr gelöst, für deren Aufstellung werden aber wenig algebraische Rechenoperationen benötigt.

4.4.6 Wärme- und Stofftransport

Neben der Impulsübertragung spielt der Wärme- und Stofftransport in der Arbeit eine große Rolle. Auf der einen Seite soll der Wärmeübergang an der Wand und damit die Wandtemperatur zuverlässig bestimmt werden, auf der anderen Seite soll aber auch die Mischung zweier Stoffströme möglichst gut beschrieben werden. Da die Bestimmung des Wärmeübergangs an der Wand sowie der Wandtemperatur experimentell aufwendig ist, wurde in den begleitenden experimentellen Projekten darauf verzichtet. Dafür wurden aber intensive Mischungsuntersuchungen durchgeführt. Um trotzdem Vergleichsdaten für den Wärmetransport zu haben, wurde deshalb auf Fälle in der Literatur zurückgegriffen. Aufgrund der Analogie von Wärme- und Stofftransport, welche für inkompressible Strömungen oder Strömungen bei niedrigen Machzahlen gültig ist, ergibt sich jedoch mit beidem zusammen eine gute Validierungsbasis für das Modell. Da es weniger um das Ergebnis an sich sondern um ein Vergleich zu bestehenden LES-Methoden geht, wird bei allen Methoden zwar dasselbe, aber einfache Modell des Gradientenflussansatzes verwendet, welches auch schon

im Grundlagenkapitel angesprochen und diskutiert wurde. Gemäß diesem lässt sich der skalare Fluss $\overline{u'_i \phi'}$, der zunächst eine durch Turbulenz hervorgerufene unbekannte Größe darstellt, durch den Gradienten seiner gemittelten Größe $\overline{\phi}$ ausdrücken:

$$\overline{u'_i \phi'} = \frac{\nu_t}{N_t} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_i} \quad (4.50)$$

Als Proportionalitätsfaktor bleibt neben der turbulenten kinematischen Viskosität die dimensionslose Kennzahl des Transportmechanismus in ihrer turbulenten Version N_t stehen. Im Fall der Wärmeübertragung ist das die turbulente Prandtl-Zahl Pr_t , im Fall der Stoffübertragung die turbulente Schmidt-Zahl Sc_t . Beide werden meist als konstant angenommen und besitzen einen Wert von $N_t \approx 1$. Bessere Konvergenz wird im Allgemeinen für etwas kleinere Werte $N_t \approx 0.7 \dots 0.9$ erreicht.

4.5 Übersicht über die aktuelle Methode

In den vorangegangenen Abschnitten wurden viele Aspekte der Kopplung von LES mit RANS-Verfahren angesprochen und untersucht. Nicht alle stellten sich als sinnvoll für die praktische Anwendung in komplexen Geometrien heraus. In die endgültige Methode wurden daher nur ausgewählte Punkte eingebracht. Mit diesem Abschnitt soll zusammenfassend eine Übersicht über die, zur Erzeugung der Ergebnisse in den folgenden Kapiteln, schlussendlich verwendete Methode und ihren Ablauf gegeben werden.

Mit der vorgeschlagenen Methode können beliebige RANS- und LES-Modelle gekoppelt werden, sofern sie die Turbulenz mit Hilfe einer turbulenten Viskosität erfassen. Konkret getestet wurden alle Kombinationen aus den in Abschnitt 4.4.5 angegebenen Modellen (vgl. Tab. 4.3 auf Seite 115). Die Kopplung über die turbulente Viskosität erlaubt die Lösung des Problems in einem Gleichungssystem, wobei das RANS-Gebiet die wandnahen Regionen abdeckt, während LES im Fernfeld berechnet wird. Der Ablauf der Berechnung im Einzelnen ist in Abbildung 4.36 dargestellt. Am Anfang steht die Festlegung der Interface-Position, welche das LES-Gebiet vom RANS-Gebiet trennt. Dazu muss zunächst ein Schalter ausgewählt werden, der für die Positionierung der Trennfläche verantwortlich ist. Zur Auswahl stehen y , y/Δ , y^+ , Re_t , k^* , f . Diese bleiben während der Rechnung entweder konstant (y , y/Δ), oder können sich in Abhängigkeit der Lösung ändern (y^+ , Re_t , k^* , f). Ist der Schalter festgelegt, kann der Verlauf der Trennfläche berechnet und gespeichert werden. Bevor die äußeren Iterationen des Zeitschritts beginnen, wird bei aktiviertem forcing noch das Feld der korrelierten Fluktuationen generiert. Danach werden die Geschwindigkeitsgleichungen gelöst, wobei auf der LES-Seite des Interface wahlweise die erzeugten Fluktuationen überlagert werden können:

$$S_U = \rho \gamma \overline{u'u'} A_n, \quad S_V = \rho \gamma \overline{v'v'} A_n, \quad S_W = \rho \gamma \overline{w'w'} A_n$$

Die Stärke des forcing orientiert sich dabei am Unterschied der turbulenten Viskositäten links und rechts der Trennfläche:

$$\gamma = \frac{\mu_m^{RANS} - \mu_m^{LES}}{\mu}$$

Für die Energiegleichung ist die Verwendung des forcing nicht notwendig. Im nächsten Schritt wird die turbulente Viskosität μ_t bestimmt. Dabei kommt es darauf an, ob sich der Gitterpunkt im RANS- oder im LES-Gebiet befindet. Schließlich wird die Druckkorrekturgleichung gelöst und gleich im Anschluss die Modellgleichungen der verwendeten Turbulenzmodelle. An dieser Stelle kommen auch die Abschätzungen für k und ε

$$k_{SGS} = C_I \Delta^2 |\hat{S}|^2 \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{SGS} = (C_s \Delta)^2 |\hat{S}|^3,$$

welche zur Realisierung des impliziten blending benötigt werden, zur Anwendung. Für den Parameter C_I können vom Benutzer die drei vorgestellten Möglichkeiten (4.29), (4.30) oder (4.32) gewählt werden.

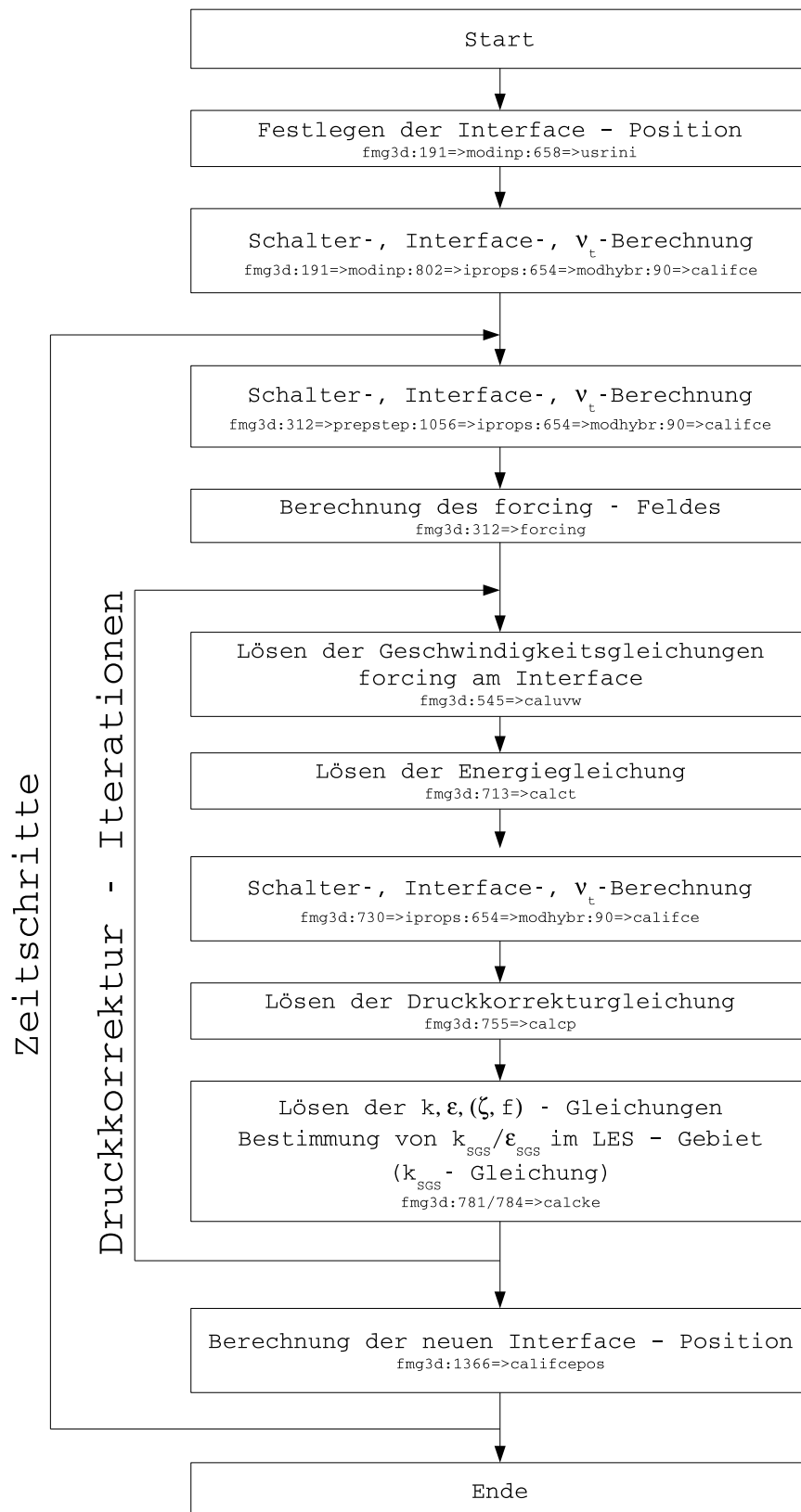


Abbildung 4.36: Ablaufdiagramm der HLR-Methode

Außer für die Kanalströmung wird bei den gezeigten Berechnungen jedoch der im Programm als Standard vorgesehene Wert von $C_I = C_s^2 / \sqrt{C_\mu}$ (4.32) verwendet. Dafür gibt es im Wesentlichen folgende Gründe:

1. Das hybride Verfahren soll auch bei Verzicht auf zusätzliches forcing möglichst geringe Unstetigkeiten in den Profilen aufweisen.
2. Diese Abschätzung ist universell dahingehend, dass auch Veränderungen von C_s durch Dämpfung oder dynamische Bestimmung berücksichtigt werden.
3. Bei einer Interface-Positionen ganz nah an der Wand $y^+ = O(20)$ könnten sich unter Umständen mit einem Faktor von neun (4.29) gegenüber der modellierten Viskosität im LES-Gebiet unrealistisch hohe Werte für μ_{RANS}^{ifce} ergeben (vgl. Abb. 4.30).
4. Die Konvergenz der Gesamtmethode ist mit dieser Abschätzung besser, als bei den anderen beiden Abschätzungen, da der Sprung in der k -Gleichung am geringsten ist. Dies ist vor allem für die Anwendung in komplexen Geometrien wichtig, in denen die Konvergenz mit RANS-Verfahren im Allgemeinen ohnehin schlechter ist, als die Konvergenz der LES.

Die Gleichungen für ζ und f werden im kompletten Gebiet, unabhängig von der Position der Trennfläche, gelöst. Damit ist die äußere Iteration abgeschlossen.

Ist die Lösung ausreichend konvergiert, wird bei Verwendung der dynamischen Trennfläche in jedem fünften Zeitschritt die neue Interface-Position berechnet, bevor der nächste Zeitschritt beginnt. Als Regelgröße dafür wird das Verhältnis von modellierter turbulenter kinetischer Energie zur gesamten turbulenten kinetischen Energie

$$k^* = \left\langle \frac{k_{mod}}{k_{mod} + k_{res}} \right\rangle$$

verwendet. Wird dieser Wert größer als der vorgegebene Grenzwert (z. B. 20%), dann ist die Filterweite nicht mehr ausreichend klein und das Modell schaltet um auf RANS bzw. positioniert das Interface so, dass der Wert im LES-Gebiet kleiner bleibt. Dieser Wert ist zwar von der Abschätzung abhängig, es zeigt sich jedoch, dass mit (4.32) gute Ergebnisse erzielt werden können.

Bezüglich der verwendeten Diskretisierungsschemata wird darauf geachtet, dass die Faktoren des flux-blending für die Primärgleichungen bei eins liegen, also CDS benutzt wird. Für die Modellgleichungen ist das in komplexeren Geometrien nicht immer möglich, so dass die Faktoren dort reduziert werden müssen. Eine detaillierte Beschreibung der verwendeten Routinen und deren Beziehung untereinander ist in Abb. 4.37 dargestellt. Die wichtigsten der für die hybride Methode neu erstellten oder modifizierten Routinen sind rot markiert.

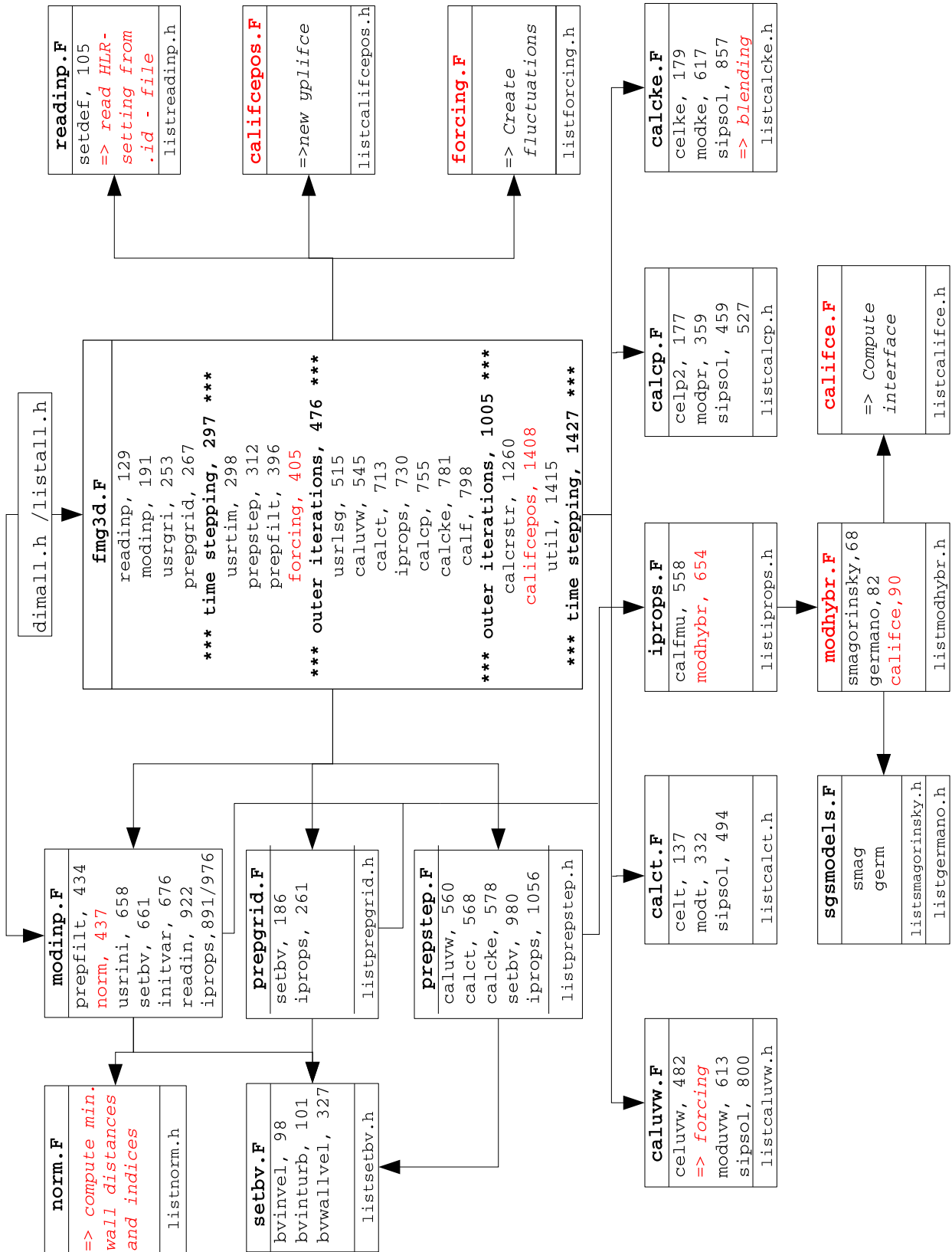


Abbildung 4.37: Routinenübersicht der HLR-Methode

Kapitel 5

Testfälle

Testfälle sind ein unverzichtbares Mittel nicht nur zur Beurteilung der Güte eines neuen Verfahrens, sondern auch zum Auffinden unberücksichtigt gelassener Aspekte, zur Überprüfung der Richtigkeit der Implementierung und zum Entdecken möglicher Optimierungspunkte. Dabei sollte die Auswahl der Fälle selbstverständlich gezielt stattfinden, so dass für die Methode und die gedachte Anwendung möglichst relevante Probleme untersucht werden. Im Fall des hybriden Verfahrens werden die Vorteile von RANS und LES kombiniert, so dass aus LES-Sicht auch an der Wand gute Ergebnisse erzielt werden und aus RANS-Sicht Strömung mit Ablösungen besser erfasst werden können. Die Anwendung auf Gasturbinenbrennkammern macht zusätzlich vor allem im Hinblick auf Dreidimensionalität der Strömung und starke Wärmezufuhr Vorgaben. Konsequenter Weise wurden folgende Testfälle ausgewählt:

1. die voll ausgebildete Kanalströmung bei einer mittleren Reynoldszahl von $Re_m = 24000$ (DNS, Abe et al., 2004), inklusive Wärmeübertragung,
2. die turbulente Strömung über eine zurückspringende Stufe bei einer niedrigen ($Re_H = 3700$, Exp. Yoshioka et al., 2001)
3. und einer hohen ($Re_H = 28000$, Exp. Vogel und Eaton, 1985) Reynoldszahl
4. sowie mit variablen Stoffgrößen ($Re_H = 5540$, LES Avancha und Pletcher, 2002),
5. die hoch aufgelöste LES der periodischen Strömung über einen zweidimensionalen Hügel von Fröhlich et al., 2005,
6. die Strömung über ein wandmontiertes Flügelprofil ($Re_c \approx 9.36 \cdot 10^5$, Exp. Greenblatt et al., 2004)
7. und schließlich die Strömung über einen dreidimensionalen Hügel (Exp. Simpson et al., 2002).

Generell gesehen, nimmt die Komplexität der Strömung von Testfall zu Testfall zu, geht von einer eindimensionalen sukzessive in eine dreidimensionale Strömung über. Um einen direkten Vergleich der Verfahren zu ermöglichen, wird neben einer hybriden Rechnung (HLR) parallel immer auch eine reine LES auf dem gleichen Gitter durchgeführt, die dann als grobe LES (LESc) bezeichnet wird. Da es sich bei den verwendeten RANS-Modellen im Falle der hybriden Methode um low-Re Modelle handelt, y^+ also immer von der Größenordnung $O(1)$ ist, stellt das von der Gitterseite her kein Problem dar. Der Vollständigkeit halber wird die Geometrie in fast allen Fällen auch mit dem zum hybriden Modell passenden RANS-Modell alleine berechnet.

5.1 Kanalströmung

Den Ausgangspunkt für alle Untersuchungen bildet die Kanalströmung. Mit ihrer Hilfe wurde die Modellentwicklung, angefangen bei den A-priori-Untersuchungen und später bei den gekoppelten Berechnungen, durchgeführt. Deshalb wird sie an dieser Stelle mit dem Ergebnis der endgültigen Modellformulierung gezeigt. Trotz der Einfachheit der Geometrie dieses Falles handelt es sich hierbei um einen der kompliziertesten Fälle für LES, denn der Wandeinfluss, dessen korrekte Erfassung den Schwachpunkt der LES darstellt, ist hier so dominant wie bei keiner anderen Geometrie. Hauptmerkmale in diesem Zusammenhang sind starke Veränderung der mittleren Strömung und intensive Turbulenzproduktion bei Annäherung an die Wand. Die Referenz-DNS für den vorliegenden Fall einer Reynoldszahl von $Re_\tau = 640$, basierend auf der Schubspannungsgeschwindigkeit, stammt von Abe et al. [1]. Die Dimensionen des Strömungsgebietes sind $(L_x, L_y, L_z) = (2\pi h, 2h, \pi h)$, wobei $2h$ die Kanalhöhe darstellt (Abb. 5.1). In beiden homogenen Richtungen, x und z , werden

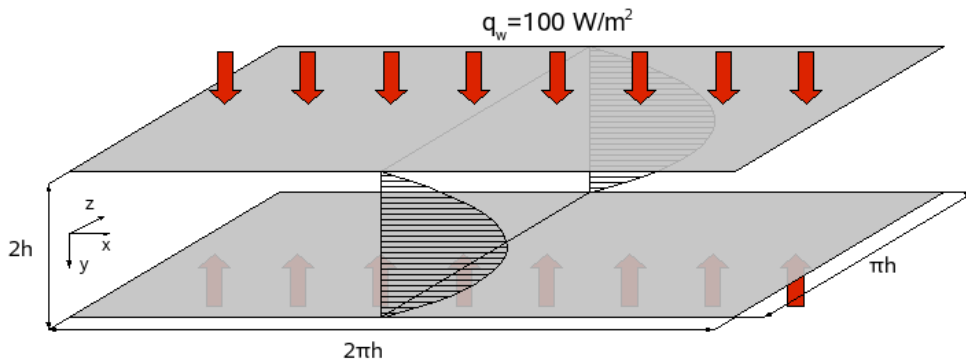


Abbildung 5.1: Geometrie der Kanalströmung

periodische Randbedingungen verwendet. Um eine Strömung mit der geforderten Reynoldszahl zu erzeugen, wird bei einer Höhe von $h = 0.1\text{ m}$ ein Druckgradient von ca. $-\frac{\partial p}{\partial x} = 0.109\text{ N/m}^3$ in x -Richtung angelegt. Damit ergibt sich im Kanal eine mittlere Geschwindigkeit von ca. 1.88 m/s . Eine Übersicht über die benutzten Stoff-

$\lambda = 0.02552 \text{ W/m K}$	$\nu = 1.474 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
$c_p = 1006 \text{ J/(kg K)}$	$\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$
$Pr = 0.712$	$Re_h = 24000$

Tabelle 5.1: Daten der Kanalströmung

werte ist in Tabelle 5.1 gegeben. Um das Modell auch für Wärmeübertragung zu testen, wird ein zusätzlicher Wärmestrom von $\dot{q} = 100 \text{ W/m}^2$ durch die obere und untere Wand aufgeprägt. Seine Stärke ist so gewählt, dass die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte vernachlässigt werden kann.

Wie auch bei den Untersuchungen zur Modellentwicklung werden drei verschiedene Gitterebenen betrachtet (vgl. Tab. 4.2, S. 70). Die LES-Rechnung auf dem feinsten Gitter gilt neben den DNS-Daten als Referenz. Die hybriden Rechnungen werden auf einem um den Faktor 8 bzw. 32 vergrößerten Gitter durchgeführt, ebenso die schon oben erwähnte grobe LES. Die reine RANS-Rechnung wird ausschließlich auf dem größten Gitter betrachtet. Die Ergebnisse, die in den folgenden Abbildungen präsentiert werden, wurden mit einer Kombination aus Chien- k - ε -Modell (vgl. 2.3.1.2) im RANS-Gebiet und Smagorinsky-Modell (vgl. 2.4.1) im LES-Gebiet erzeugt. Andere Modellkombinationen mit forcing ergeben in dieser Strömung ähnliche Ergebnisse. Abbildung 5.2 zeigt das Endergebnis für das einmalig vergrößerte Gitter. Links oben ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit $u^+ = \bar{u}/u_\tau$ über der Kanalhöhe in logarithmischer Darstellung bis zur Kanalmitte dargestellt. Gestrichelt eingezeichnet ist der analytische Verlauf einer Gleichgewichtsgrenzschicht (viskose Unterschicht und logarithmisches Gebiet) wie man sie in der Kanalströmung vorfindet. Als Referenz sind zusätzlich DNS-Daten und die Ergebnisse der feinen LES eingetragen. Man sieht deutlich, dass die HLR-Methode wesentlich besser abschneidet als die grobe LES. Die Ergebnisse liegen sogar sehr nah an denen der feinen LES. Der Rechenzeitüberschuss gegenüber der reinen LES liegt bei dieser Modellkombination bei ca. 35%, verursacht durch das Lösen zweier zusätzlicher Gleichungen im RANS-Gebiet und forcing. In der Abbildung oben rechts sieht man den Verlauf der gesamten turbulenten kinetischen Energie. Dieser wird durch Addition des modellierten (mod) und des aufgelösten (res) Anteils errechnet. Der modellierte Anteil wird dabei durch das Modell bestimmt, der aufgelöste durch Berechnung aus dem momentanen Geschwindigkeitsfeld und Mittelung über eine gewisse Zeit. Bei der feinen LES ist der modellierte Anteil verschwindend gering, da das Gitter sehr fein ist. Auf dem groben Gitter wächst dieser Anteil schnell an. Im Falle der HLR-Methode wird der modellierte Anteil im RANS-Gebiet methodenbedingt sehr groß, nahe an der Wand sogar größer, als der aufgelöste. Dass überhaupt ein aufgelöster Anteil vorhanden ist, liegt an der Anregung der RANS-Zone durch das angrenzende LES-Gebiet, was im Rahmen der Vorstellung der Methode in Kapitel 4 schon ausführlich diskutiert wurde. Der modellierte Anteil nimmt sichtbar ab sowie das Interface in Richtung LES-Gebiet überschritten wird. Um dabei konform mit den Untersuchungen im vierten Kapitel zu bleiben, wird die Trennfläche hier ebenfalls bei $y^+ \approx 100$ positioniert. Das Ergebnis zeigt, dass gerade in Wandnähe der Verlauf sehr viel besser durch das hybride Verfahren wiedergegeben wird. Die Höhe des Maximums von k^+ liegt sehr

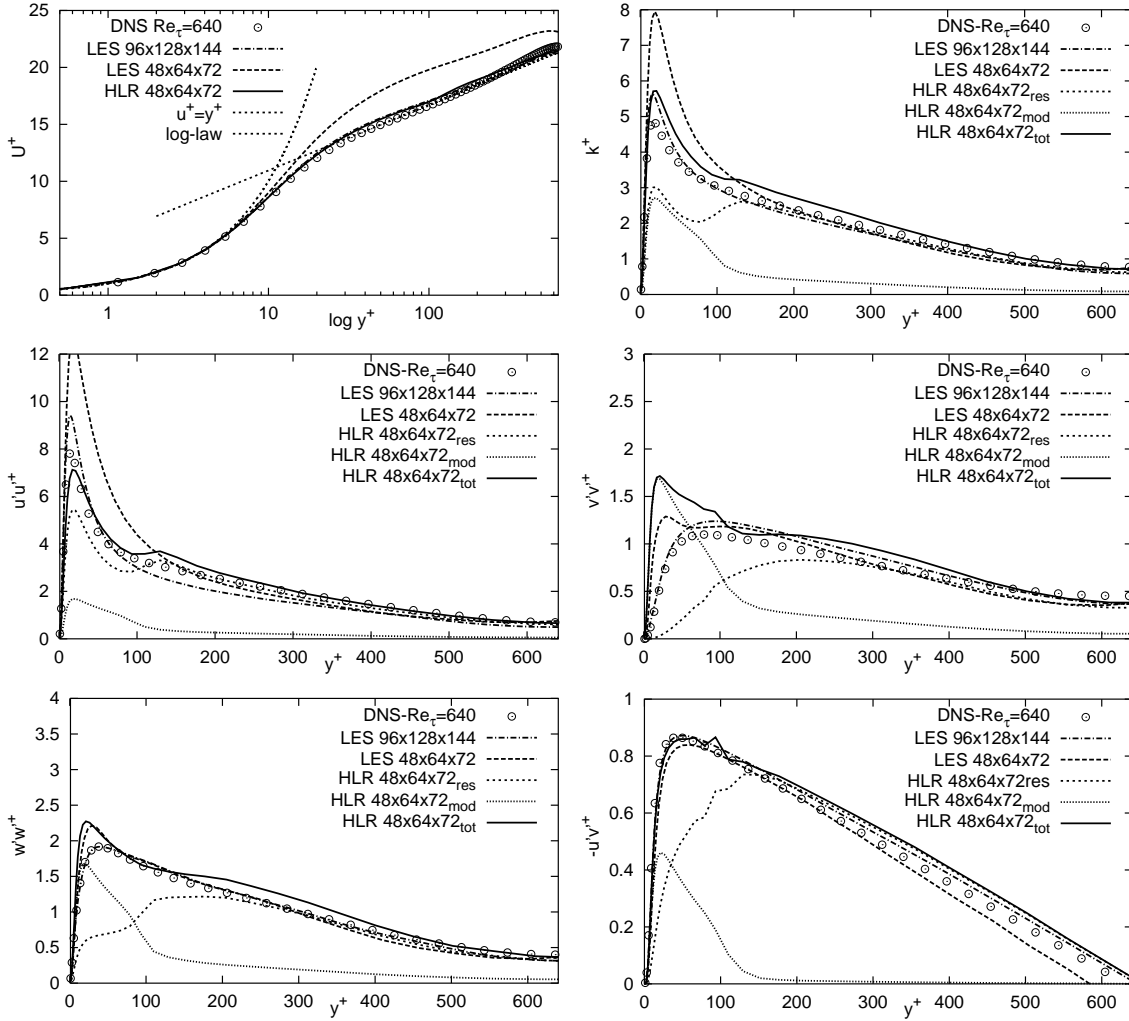


Abbildung 5.2: Ergebnis der Kanalströmung auf dem Gitter 48 x 64 x 72

nahe an dem der feinen LES. Im Verlauf der Reynoldsspannung $\overline{u'v'}$ ist anhand des Zacken im Profil noch die Position der Trennfläche erahnbar. Dieser Zacken, der durch den Unterschied von μ_t auf beiden Seiten des Interface verursacht wird, kann auch durch das forcing nicht ganz ausgeglichen, aber doch wesentlich vermindert werden. Anhand dieser Grafik wird auch ersichtlich, dass die berechnete Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ im Rahmen der groben LES viel zu niedrig berechnet wird, denn der Wert für y^+ in der Kanalmitte entspricht gerade $Re_\tau = h u_\tau / \nu$, welches im vorliegenden Fall bei $Re_\tau \approx 640$ liegen müsste. Das Ergebnis der Wärmeübertragung zeigt ähnliche Tendenzen wie die isotherme Strömung. Allerdings ist zu bemerken, dass der Verlauf der normalisierten, gemittelten Temperatur $\Theta^+ = (T - T_w)/T_\tau$ im Bereich der Kanalmitte weder von der feinen LES noch vom hybriden Modell richtig wiedergegeben wird. Der Grund dafür ist im einfachen Gradientenflussansatz zu sehen, der für alle Berechnungen verwendet wird. Außerdem zeigt sich der Sprung im Reynoldsfluss $\overline{v'T'}$ etwas ausgeprägter, als vorher in $\overline{u'v'}$.

Da für die Kanalströmung ebenso Vergleichsdaten zu räumlichen Energiespektren vorhanden sind, bietet es sich an, die Auswirkungen der Gittervergrößerung im Falle

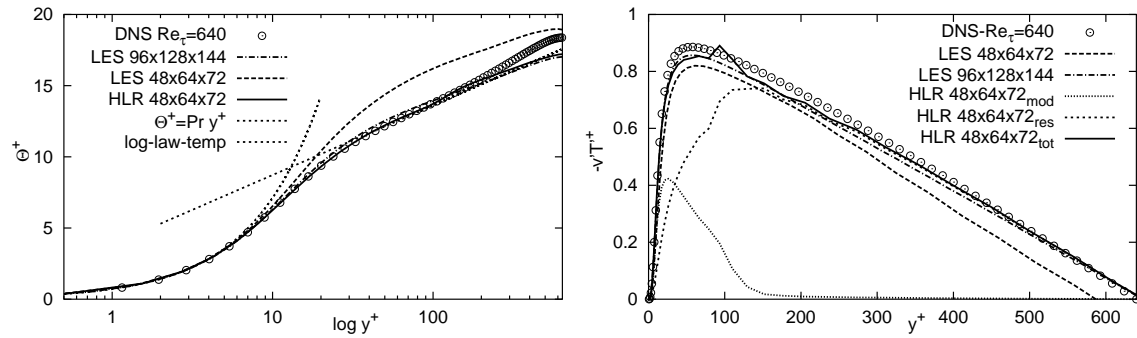


Abbildung 5.3: Ergebnis der Kanalströmung bzgl. Wärmeübertragung

des hybriden Verfahrens auch im Wellenzahlenbereich zu untersuchen. Dazu werden drei Zeitreihen in die x-, y- und z-Richtungen entlang dreier Linien im Raum aufgenommen, um die jeweiligen eindimensionalen Spektren auszurechnen (Abb. 5.4). Anders als im Fall einer reinen Zeitreihe ist die Anzahl der zur Verfügung stehenden Stützstellen für die räumlichen Spektren nicht unbegrenzt, sondern hängt von der jeweiligen Gitterauflösung ab. In der Abbildung ist der jeweilige Wert für das feinste Gitter angegeben. Bei den vergrößerten Gittern reduziert sich die Anzahl entsprechend. Weiterhin muss noch beachtet werden, dass aufgrund des Nyquist-Kriteriums die Zahl für die endgültige Rechnung nochmals halbiert wird. Dies führt beim größten verwendeten Gitter auf effektiv sehr wenige Punkte, was sich in den Verläufen in Abb. 5.5 erkennen lässt. Wett gemacht wird dieser Nachteil zumindest

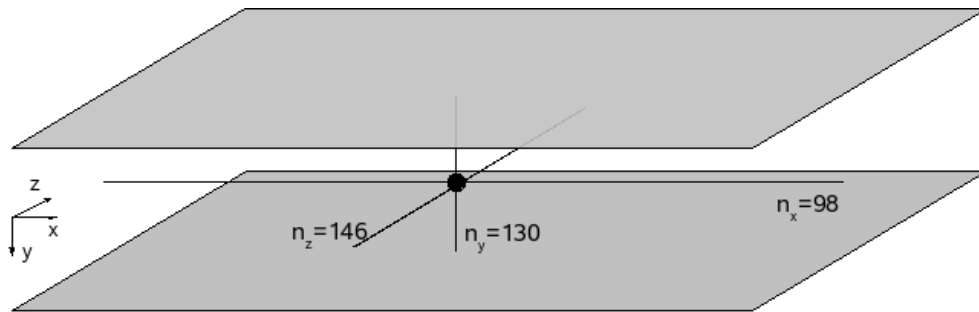


Abbildung 5.4: Positionen der aufgenommenen Datenreihen für räumliche und zeitliche Korrelation

teilweise durch die Möglichkeit, über sehr viele Zeitschritte zu mitteln. Als Ergebnis werden die drei, zwar auch zeitlich gemittelten, aber im Prinzip räumlichen Korrelationskoeffizienten R_{11} , R_{22} und R_{33} für die drei Raumrichtungen bestimmt, welche in Abb. 5.5 auf der linken Seite abgebildet sind. Aus diesen werden dann über eine Fouriertransformation, wie im Abschnitt 2.2.2 beschrieben, die eindimensionalen Energiespektren E_{11} , E_{22} und E_{33} erzeugt (Abb. 5.5, rechts). Das Wiederansteigen der Koeffizienten R_{11} und R_{33} ist auf die periodische Randbedingung zurückzuführen und wird für die Erzeugung der Energiespektren durch eine bestimmte Window-Funktion unterdrückt. Die feine LES stimmt bereits bezüglich des Strömungsfeldes sehr gut mit den vorhandenen Referenzdaten überein. Dies äußert sich auch in ei-

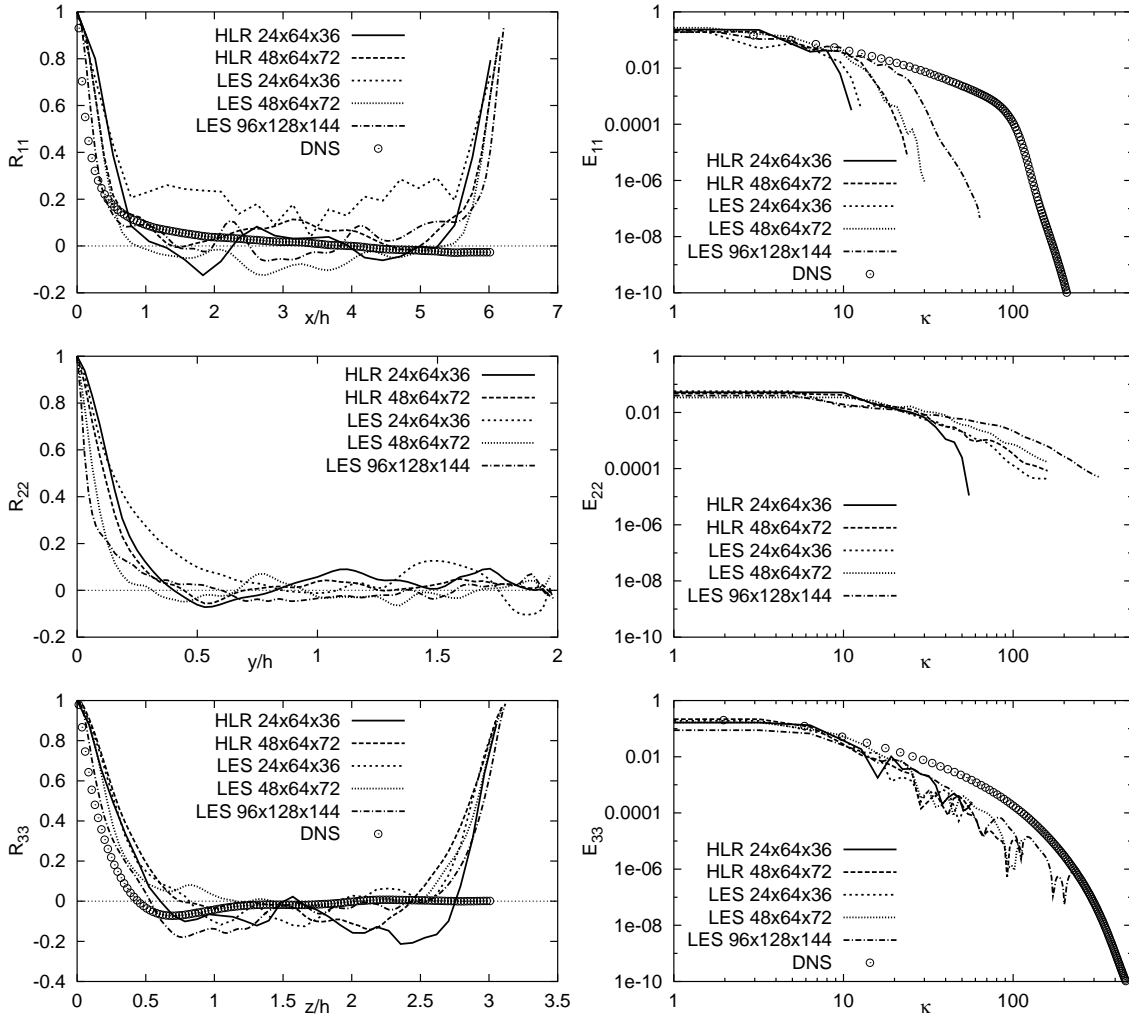


Abbildung 5.5: Korrelationskoeffizienten (links) und 1-D Energiespektren der Kanalströmung

ner guten Übereinstimmung im Korrelationskoeffizienten und den Energiespektren. Anhand des Spektrums E_{11} kann man sehr gut die Auswirkung der unterschiedlichen Gitterauflösungen erkennen. Je größer die Auflösung in dieser Richtung ist, desto weiter folgt das Spektrum dem der DNS-Daten. Aufgelöst werden kann nur bis zur Grenzwellenzahl (cut off) $k_c = \pi/\Delta$, alles was darunterliegt, wird nicht erfasst und muss vom Modell beschrieben werden. Weiterhin ist bemerkbar, dass die Verläufe von LES und HLR auf gleichen Gittern sehr ähnlich sind, beide also zumindest in diesem Gebiet die Strömung gleichermaßen auflösen können. Da die Grenzwellenzahl bei einer LES im Übergangsbereich des Spektrums liegen sollte, kann man erkennen, dass das Gitter mit der Auflösung $24 \times 64 \times 36$ gerade an der Grenze liegt, wahrscheinlich sogar schon etwas zu grob ist. Dabei darf aber nicht vergessen werden, dass dieses Spektrum nur entlang der betrachteten Linie gilt, so dass die Situation in anderen Regionen, z. B. nah an der Wand, schon anders aussehen kann. Überhaupt ist diese Situation im Kanal die optimale, sozusagen eine

Modellströmung für die Betrachtung der Wellenzahlspektren, denn man hat es im Prinzip mit einer eindimensionalen Strömung und einem perfekten Gitter (orthogonal, äquidistant) in dieser Richtung zu tun. In der wandnormalen Richtung ist dies beispielweise nicht mehr der Fall, denn das Gitter ist zur Wand hin verfeinert. Man muss dann entweder eine nicht äquidistante Fourier-Transformation anwenden, oder die Korrelationsfunktion vor der Transformation auf ein äquidistantes Gitter interpolierten. Möglicherweise gibt es aus diesem Grund keine DNS-Daten zu dieser Richtung. Trotzdem kann man anhand dieser Grafik deutlich den in dieser Richtung vorhandenen dämpfenden Einfluss der RANS-Region im Fall von HLR erkennen. Auf dem größten Gitter liegt hier die Anzahl der aufgelösten Wellenzahlen deutlich geringer, als bei der vergleichbaren LES. Beim mittleren Gitter ist der Unterschied zwischen HLR und LES zwar auch vorhanden, aber bei weitem nicht so ausgeprägt. Dies hängt damit zusammen, dass durch die wesentlich kleinere Filterweite im Fall des mittleren Gitters die Abschätzungen von k_{SGS} und ε_{SGS} und damit μ_t als Randbedingung am Interface ebenfalls kleiner sind als beim groben Gitter, so dass die Dämpfungswirkung wesentlich schwächer ausfällt. In der Spannweitenrichtung sieht das Spektrum deutlich anders aus, als in Strömungsrichtung. Die Steigung $-5/3$ ist zwar ebenfalls zu erahnen, aber es zeigt sich keine so eindeutige Trennung der verschiedenen Zonen, sondern eher ein kontinuierlicher Übergang. Dieses Verhalten wird von allen Rechnungen jedoch gut wiedergegeben. Zusammenfassend kann man erkennen, dass das hybride Verfahren also durchaus in der Lage ist, turbulente Spektren zu erfassen. Gut gelingt dies selbstverständlich nur im LES-Gebiet der Rechnung, im RANS-Gebiet wird die Dämpfung durch die hohe modellierte Viskosität zu stark.

Um auch über die zeitliche Auflösung eine Aussage machen zu können, wird eine reine Zeitreihe an einem festen Punkt aufgenommen. Damit lässt sich die Autokorrelation und das zugehörige Energiespektrum berechnen (Abb. 5.6). Interessant ist,

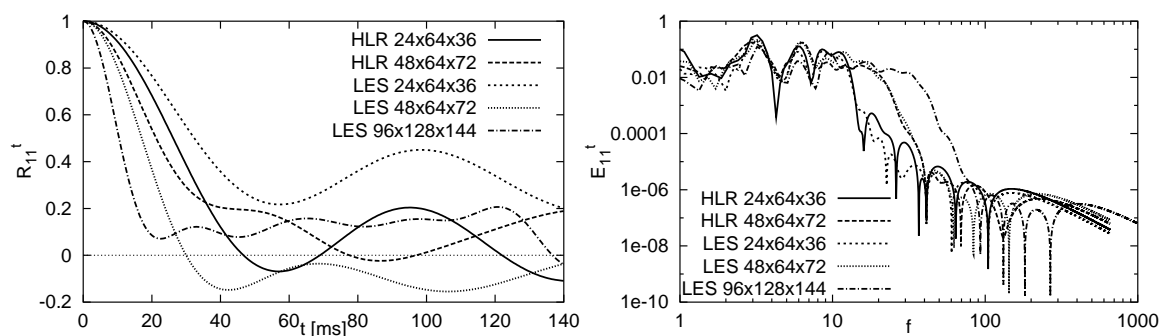


Abbildung 5.6: Autokorrelationskoeffizient (links) und zugehöriges zeitliches Energiespektrum der Kanalströmung

dass sich, obwohl die Zeitschrittweite für die Berechnungen auf den vergrößerten Gittern bei allen die gleiche ist ($7.5 \cdot 10^{-4}$), zeigt, dass im höher energetischen Bereich auf den räumlich größeren Gittern weniger Frequenzen erfasst werden. Die für das hybride Verfahren wichtige Aussage an dieser Stelle ist jedoch, dass auch im zeitlichen Spektrum der Unterschied zur LES auf dem gleichen Gitter verschwin-

dend gering ist. Zusammen mit den räumlichen Informationen können nun gemäß Kapitel 2.2.2, S. 16, die Zeit- und Längenskalen abgeschätzt werden. Dazu wird der Genauigkeit halber die hoch aufgelöste LES verwendet. Das Ergebnis ist in Tabelle 5.2 aufgeführt. Diese Werte gelten nur am Ort der aufgenommenen Datenreihen.

	Integral [ms bzw. mm]	Taylor [ms bzw. mm]	Kolmogorov [ms bzw. mm]
t	30	12	1.0
x	64	23	0.1
y	6.6	2.3	0.1
z	28	10	0.1

Tabelle 5.2: Abgeschätzte Längen- und Zeitskalen der berechneten Kanalströmung bei $Re_\tau = 640$

Ein Problem ergibt sich dabei für die nicht-homogene Richtung im Kanal, hier y , denn das Integrale Längenmaß und das Taylormass variieren stark in dieser Richtung (vgl. Abb. 4.1). Der berechnete (relativ kleine) Wert stellt somit eine Art Mittelwert dar, der nochmals verdeutlicht, wie stark die Skalen im Bereich der Wand konvergieren. Interessanterweise unterscheiden sich die Längenmaße in x - und z -Richtung um einen Faktor von nahezu zwei. Das bedeutet, dass selbst in der Kanalmitte anisotrope Strukturen vorherrschen, was auch zu dem unterschiedlichen Aussehen der Energiespektren passt.

Schließlich kann noch die nötige Simulationszeit für eine bestimmte Genauigkeit und die optimale Abtastrate für die Mittelung betrachtet werden. Mit dem Integralen Zeitmaß ergibt sich das minimal nötige Abtastintervall aus

$$t_{abtast,min} \approx 2L_\tau \quad (5.1)$$

zu $6 \cdot 10^{-2} s$. Das bedeutet, dass kürzere Abtastintervalle als $t_{abtast,min}$ die Genauigkeit des Mittelwertes nicht verbessern, sondern lediglich einen Mehraufwand bedeuten, da die Werte erst nach dieser Zeit als statistisch unabhängig angesehen werden können. Bei einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ (feine LES) ist es demnach ausreichend, nur jeden hundertzwanzigsten Datenwert zur Statistik dazuzuzählen. Um die nötige Simulationszeit abzuschätzen, braucht man Informationen über die Varianz der interessierenden Größe, hier die Geschwindigkeit U . Diese entspricht der Reynoldsspannung $\overline{u'u'}$ und hat für die vorliegende Strömung einen Wert zwischen $\sigma^2 \approx 0.0044 \text{ m}^2/s^2$ und $\sigma^2 \approx 0.071 \text{ m}^2/s^2$, je nach dem ob man sich in der Kanalmitte oder nah an der Wand befindet. Möchte man den Mittelwert der Geschwindigkeit mit einer Wahrscheinlichkeit von 96% auf 1% genau bestimmen, dann erhält man je nach y -Position unterschiedliche Ergebnisse. Beispielhaft für die zwei oben ausgewählten Positionen ergeben sich aus (2.36), Seite 18, unter Berücksichtigung der dort unterschiedlichen Geschwindigkeiten ($2.1 \text{ m}^2/s^2$ bzw. $1 \text{ m}^2/s^2$)

Simulationszeiten von

$$t = \frac{2 \cdot 0.0044 \, m^2/s^2 \cdot 0.03 \, s}{\left(\frac{0.021 \, m/s}{2}\right)^2} \approx 2,4 \, s \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{2 \cdot 0.071 \, m^2/s^2 \cdot 0.03 \, s}{\left(\frac{0.01 \, m/s}{2}\right)^2} \approx 170 \, s. \quad (5.2)$$

Während für den Wert in der Kanalmitte also ca. 4800 Zeitschritte und damit nur 40 statistisch unabhängige Werte nötig wären, müsste man für die gleich wahrscheinliche Genauigkeit in der Nähe der Wand über 300.000 Zeitschritte rechnen. Dies hängt damit zusammen, dass dort die Spannung, also die Varianz der Geschwindigkeit, größer, die gemittelte Geschwindigkeit zusätzlich kleiner ist als im Kerngebiet. Mit dieser Anzahl an Zeitschritten würde man dann 2800 unabhängige Beiträge zur Statistik haben. Zum Vergleich sei noch erwähnt, dass für eine Durchströmung des Gebietes im Mittel ca. 500 Zeitschritte nötig sind. Die Simulationszeiten entsprechen somit ca. 10 bzw. 600 Durchströmungen. Ein realistischer Wert für in der Literatur gezeigte LES-Ergebnisse liegt für periodisch durchströmte Gebiete bei ca. 50 – 100. Die Konsequenz daraus wird ersichtlich, wenn man den Umkehrschluss des oben gezeigten zieht. Bei gleicher kurzer Simulationszeit, also im betrachteten Fall ca. 10 Durchströmungen, wird der Wert an der Wand nur auf ca. 8% genau vorhergesagt. Auch an dieser Stelle zeigt sich die Problematik der Wand bei LES-Rechnungen. Bei der hybriden Methode wird hier in zweierlei Hinsicht Abhilfe geschaffen. Zum ersten wird im Normalfall die Zeitschrittweite an sich vergrößert, so dass weniger Schritte nötig sind. Zum anderen wird durch die Verkleinerung der aufgelösten Spannungen die für dieses Problem ausschlaggebende Varianz verkleinert, denn der modellierte Anteil hat keinen Einfluss auf die statistische Varianz der Geschwindigkeit.

Das Problem, dass bei der Durchführung der oben gezeigten Abschätzung zu Tage tritt, ist die Tatsache, dass man Kenntnis über die Zeit- und Längenmaße, sowie über Varianzen der Geschwindigkeiten, also die Spannungen haben muss. Die Abschätzung kann somit nicht a-priori erfolgen, sondern erst im Laufe der Berechnung oder nach einer ersten Rechnung. Da die Zeitschrittweite, die Gitterauflösung und die Dauer der Mittelung, welche als Folge der Abschätzungen eventuell nochmals geändert werden, wiederum das Ergebnis beeinflussen, wird klar, dass es sich hier um einen iterativen Prozess handelt.

5.2 Stufenströmungen

Stufenströmungen zählen zu den am häufigsten berechneten Strömungskonfigurationen mit Ablösung. Hauptmerkmal dieser Strömung ist die Ablösung an der Stufenkante und die Ausbildung einer Rezirkulationszone. Der berechnete Ort des Wiederanlegepunktes an der unteren Wand, der das Ende dieser Zone bildet, stellt einen wichtigen Indikator für die Güte des verwendeten Modells dar.

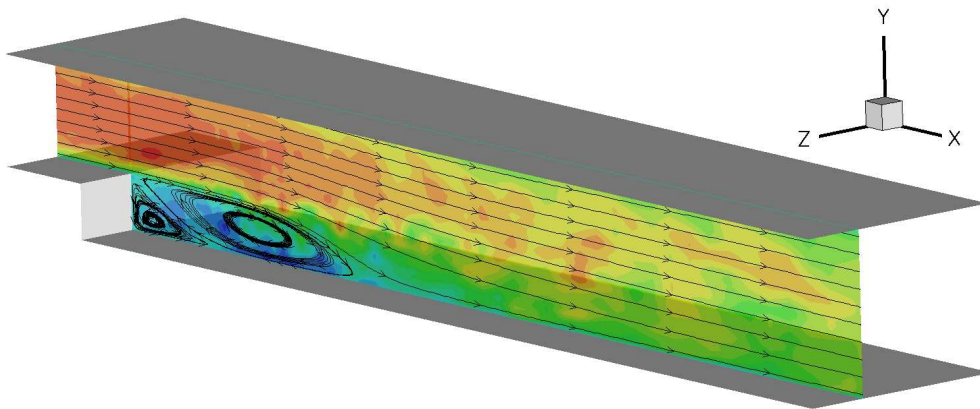


Abbildung 5.7: Rechengebiet und Topologie bei einer Stufenströmung

Aufgrund der stark instationären, abgelösten Scherschicht, ist diese Strömung sehr gut für Berechnungen mit LES geeignet. Trotzdem ist die korrekte Erfassung der wandnahen Region, vor allem bei Berücksichtigung der Wärmeübertragung, von entscheidender Bedeutung. Es bietet sich also an, das HLR-Verfahren in einer solchen Strömung zu testen. Weiterhin ist die zurückspringende Stufe (backstep) ein Hauptbestandteil der später zu berechnenden Brennkammer und stellt somit einen Teilschritt auf dem Weg zur Zielgeometrie dar. Es werden drei verschiedene Konfigurationen berücksichtigt:

- die Strömung bei einer niedrigen Reynoldszahl von $Re_H = 3700$ (wobei h die Stufenhöhe darstellt)
- die Strömung mit Wärmeübertragung bei einer hohen Reynoldszahl von $Re_H = 28000$
- die Strömung mit Wärmeübertragung und veränderlichen Stoffgrößen bei einer Reynoldszahl von $Re_H = 5540$

Die Rechengebiete der drei Fälle sehen sehr ähnlich aus (Abbildung 5.8), unterscheiden sich aber vor allem im Erweiterungsverhältnis ER (Höhe Auslass / Höhe Einlass) und den Einlassbedingungen. Das Erweiterungsverhältnis der Strömungen mit niedriger Reynoldszahl und der mit veränderlichen Stoffgrößen liegt bei $ER = 1.5$, das der Strömung mit der hohen Reynoldszahl bei $ER = 1.25$. Auch in Bezug auf die

Einlassbedingungen weicht diese Simulation von den anderen beiden ab. Während hier eine sich entwickelnde Grenzschichtströmung am Einstrom vorgegeben wird, handelt es sich bei den anderen beiden Fällen um eine voll entwickelte Kanalströmung. In allen Fällen werden in Tiefenrichtung (hier z) periodische Rand-

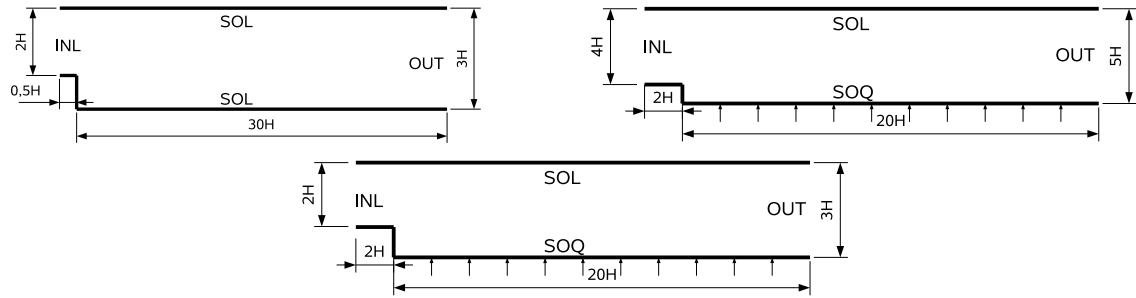


Abbildung 5.8: Rechengebiet des Falls mit niedriger (links) und hoher Reynoldszahl (rechts), sowie variablen Stoffwerten (unten)

bedingungen angewendet, so dass es sich eigentlich um zweidimensionale Strömungen handelt. Der Ausstrom wird bei den letzten beiden Fällen durch eine konvektive Auslassrandbedingung realisiert. Bei der isothermen Berechnung liegt der Auslass relativ weit von der Stufe entfernt, so dass die Nullgradienten-Randbedingung zum Einsatz kommt.

5.2.1 Isotherme Berechnung

Ziel dieser Berechnung ist die Untersuchung des Verhaltens der hybriden Methode bei einer ersten komplizierteren Geometrie als dem Kanal im Hinblick auf Probleme mit der Positionierung und Berechnung des Interface sowie Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Methode. Als Testfall wird eine Strömung bei $Re_H = 3700$ ausgewählt, wobei H die Stufenhöhe bezeichnet. Experimentelle Vergleichsdaten zu diesem Fall werden von Yoshioka et al. [74] geliefert. Das Rechengebiet ist in Abbildung 5.8 oben links skizziert. Die Ausdehnung des Rechengebietes in der periodischen z -Richtung beträgt πh .

Als Arbeitsfluid wird Wasser mit einer Dichte von $\rho = 998,2 \text{ kg/m}^3$ und einer kinematischen Viskosität von $\nu = 1.0038 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ verwendet. Dies hat den angenehmen Nebeneffekt, dass damit die Implementierung auch auf mögliche Fehler in Bezug auf die Dichte überprüft werden kann. Verwendet man immer Luft mit einer Dichte von $\rho \approx 1 \text{ kg/m}^3$, dann fallen diese Fehler meist nicht auf.

Die voll entwickelte Kanalströmung am Einlass besitzt eine Reynoldszahl basierend auf u_τ von $Re_\tau = 180$. Mit der gewählten Höhe von $H = 0.02 \text{ m}$ ergibt sich daraus eine mittlere Geschwindigkeit von ca. $u_b = 0,1807 \text{ m/s}$. Zur Erzeugung der Daten wird eine separate Kanalströmung bei der oben genannten Reynoldszahl durchgeführt und ausreichend viele Zeitschritte gespeichert, die dann während der Rechnung in die Einlassebene eingelesen werden. Das Rechengitter ist in Abbildung 5.9

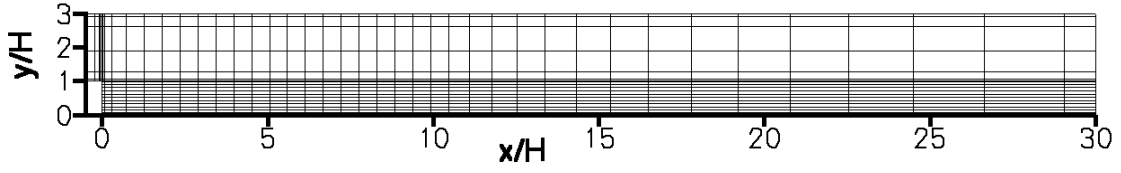


Abbildung 5.9: Gitter der berechneten zurückspringenden Stufe, jeder 2. Punkt gezeigt

gezeigt. Es setzt sich aus einem Hauptteil mit $(N_x, N_y, N_z) = (141, 82, 16)$ Zellen in 2 Blöcken und einem Einlassteil mit $(N_x, N_y, N_z) = (13, 32, 16)$ Zellen zusammen, der an das Gitter der Kanalströmung für die Erzeugung der Einlassdaten angepasst ist. Insgesamt besteht das Gitter also aus 3 Blöcken mit ca. 190000 Zellen. Entsprechend dem verwendeten Chien RANS-Modell wird das Gitter in einer low-Re Version ausgeführt, so dass $y^+ \approx 1$ an der unteren und oberen Wand. Im Rest des Strömungsgebietes wird sowohl mit Smagorinsky- als auch mit Yoshizawa-Modell gearbeitet.

Zu Testzwecken werden mehrere Interface-Positionen gewählt. Die gezeigten Ergebnisse wurden mit einem Interface bei $y^+ \approx 18$ erhalten, was dem mit Hilfe des variablen Interfaces ermittelten Wert entspricht (Abb. 5.10). In Gegensatz zum Ver-

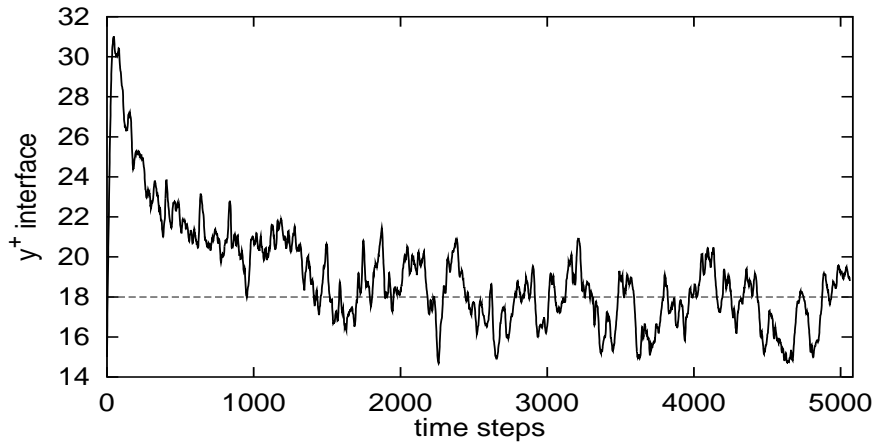


Abbildung 5.10: Änderung der Interface-Position mit variablem Interface im Falle der zurückspringenden Stufe

lauf der Interface-Position beim Kanal zeigt der der Stufenströmung kein so glattes Verhalten. Nach Erreichen eines bestimmten Wertes oszilliert die Position um diesen herum, was mit dem instationären Charakter der Strömung zusammenhängt. Für die weiteren Berechnungen wird die Position bei dem oben genannten y^+ -Wert fixiert. Wo das Interface schließlich physikalisch verläuft, ist in Abbildung 5.11 für den fixierten Wert von $y^+ = 18$ zusammen mit dem Momentanwert der Geschwindigkeit eingetragen. Außerdem sind noch die Schnittebenen eingezeichnet, entlang derer später Ergebnisse verglichen werden. Man kann erkennen, dass das Interface zwischen RANS und LES weder eine gerade Linie ist, noch entlang einer Gitterlinie

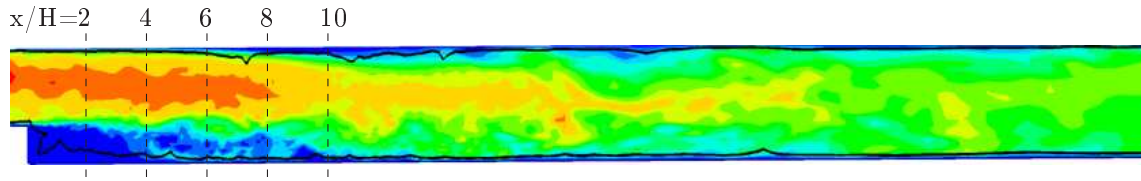


Abbildung 5.11: Interface-Verlauf bei $y^+ = 18$ auf Konturplot des momentanen Geschwindigkeitsbetrags und Position der Schnittebenen für die Ergebnisdarstellung

verläuft. Bedingt durch die Definition von $y^+ = y u_\tau / \nu$ ist die Position der Trennfläche an die u_τ bzw. an die Wandschubspannung und damit an die Geschwindigkeit in der wandnächsten Zelle gekoppelt. Dadurch ist der Wandabstand in physikalischen Koordinaten teilweise sehr unterschiedlich. Während er im Bereich der angelegten Strömung ähnlich dem Kanal einen relativ konstanten Wert besitzt wächst er im Bereich der Rezirkulationszone, bedingt durch die kleinere Geschwindigkeit stark an. Normiert mit der Wiederanlegelänge zeigt das Ergebnis für die mittlere Ge-

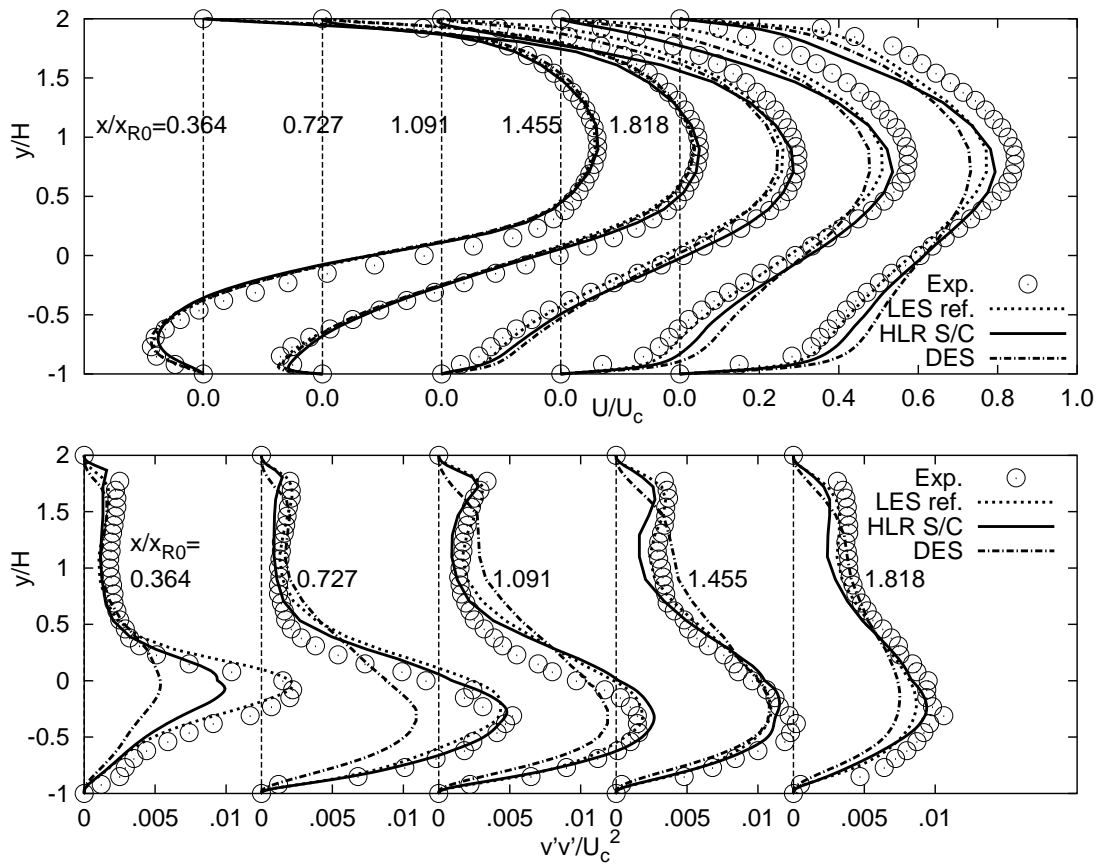


Abbildung 5.12: Schnitte der mittleren Geschwindigkeit und $\overline{v'v'}$ bei der zurückspringenden Stufe

schwindigkeit gute Ergebnisse im Vergleich mit experimentellen Daten und einer Referenz-LES mit ca. 1.2 Mio. (354x110x32) Zellen sowie einer Detached-Eddy Simulation ebenfalls auf dem hybriden Gitter, die beide von Sarić [55] durchgeführt

wurden. Etwas problematisch scheint die Zone an der oberen Wand zu sein. An dieser Stelle zeigen die Profile der hybriden Rechnung eine größere Abweichung von den Referenzdaten. Diese Abweichung wird durch das RANS-Modell hervorgerufen, welches für sich alleine betrachtet die gleiche Abweichung aufweist.

Bei den $\overline{v'v'}$ Spannungen liegt das Ergebnis der hybriden Rechnung wesentlich besser als das der DES, es liegt größtenteils sogar sehr nah an der feinen LES. Auch die Schubspannung, welche hier nicht gezeigt ist, weist einen guten Verlauf auf. Aufgrund der sehr niedrigen Reynoldszahl kommen jedoch die Vorteile des hybriden Verfahrens in dieser Strömung nicht voll zur Geltung. Das Interface liegt relativ nah an der Wand ($y^+ = 18$), wodurch auch einige Annahmen, die für das Modell getroffen werden, nicht gut erfüllt sind. Aus diesem Grund konzentrieren sich die folgenden Untersuchungen auf Strömungen mit höheren Reynoldszahlen, bei welchen die RANS-Zone wesentlich ausgeprägter ist.

5.2.2 Berechnung mit Wärmeübertragung

Die korrekte Berechnung der Wärmeübertragung ist in vielen Fällen eng mit der korrekten Bestimmung der Schubspannung an der Wand verknüpft. Da diese gezwungener Maßen im RANS-Gebiet des hybriden Verfahrens liegt, verspricht die neue Methode, welche bezüglich der Schubspannung bereits Verbesserungen zeigte, auch eine Verbesserung hinsichtlich der Berechnung der Wärmeübertragung.

Um nicht noch einen zusätzlichen Unsicherheitsfaktor ins Spiel zu bringen, soll zuerst mit konstanten Stoffwerten gerechnet werden. Dafür darf die Wärmezufuhr aber nicht zu groß sein. Ein Fall, der so etwas bietet und außerdem noch eine relativ hohe Reynoldszahl aufweist ($Re_H = 28000$), ist der von Vogel und Eaton [72]. In dieser Konfiguration (Abb. 5.8) hat man es im Unterschied zum vorhergehenden Fall mit einem Erweiterungsverhältnis von 1:4 zu tun, so dass der Einlaufkanal bei einer Stufenhöhe von $H = 0.038\text{ m}$ die Höhe $4H$ besitzt. Konform mit Rechnungen von Keating et al. [33] wird das Gebiet gegenüber dem ersten Fall auf $20H$ verkürzt. Dafür wird jedoch mit einer konvektiven Auslassrandbedingung anstelle der Nullgradientenbedingung gearbeitet. Die sich entwickelnde Grenzschichtströmung (vgl. Tab. 5.3) am

verwendete Stoffwerte	Einlassdaten bei $x/H = -3$
$\nu = 1.544 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$	$U_{ref} = U_c = 11.3 \text{ m/s}$
$\lambda = 0.02615 \text{ W/(m K)}$	$Re_\theta = 3370$
$c_p = 1005 \text{ J/(kg K)}$	$\theta = 0.468 \text{ cm}$
$\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$	$\delta/H = 1.0658$
$Pr = 0.712$	$C_f = 0.00312$

Tabelle 5.3: Daten der Strömung über eine zurückspringende Stufe mit Wärmeübertragung

Einlass gestaltet sich in ihrer Erzeugung schwieriger als im Falle der voll entwickelten Kanalströmung. Will man bei der Erzeugung der instationären Daten auch mit

periodischen Randbedingungen arbeiten, muss ein zusätzliches „forcing“ eingebaut werden, welches ein vorgegebenes Profil erzeugt, oder man muss die Grenzschicht von Anfang an bis zur benötigten Höhe ohne periodische Bedingungen berechnen. Beide Verfahren sind relativ aufwendig, so dass in der vorliegenden Arbeit ein anderer Weg gewählt wurde. Zuerst wird eine Grenzschichtsimulation mit Hilfe eines Reynoldsspannungsmodelles von Jakirlić und Hanjalić [27] durchgeführt. Um daraus instationäre Daten zu erhalten, wird der Einlassdatengenerator nach Klein et al. [34] benutzt. Dieser erzeugt sowohl zeitlich, als auch räumlich korrelierte Daten nach Vorgabe einer standardisierten Korrelationsfunktion. Diese Daten werden dann in jedem Zeitschritt eingelesen. Abbildung 5.13 zeigt links das aus der separaten Rech-

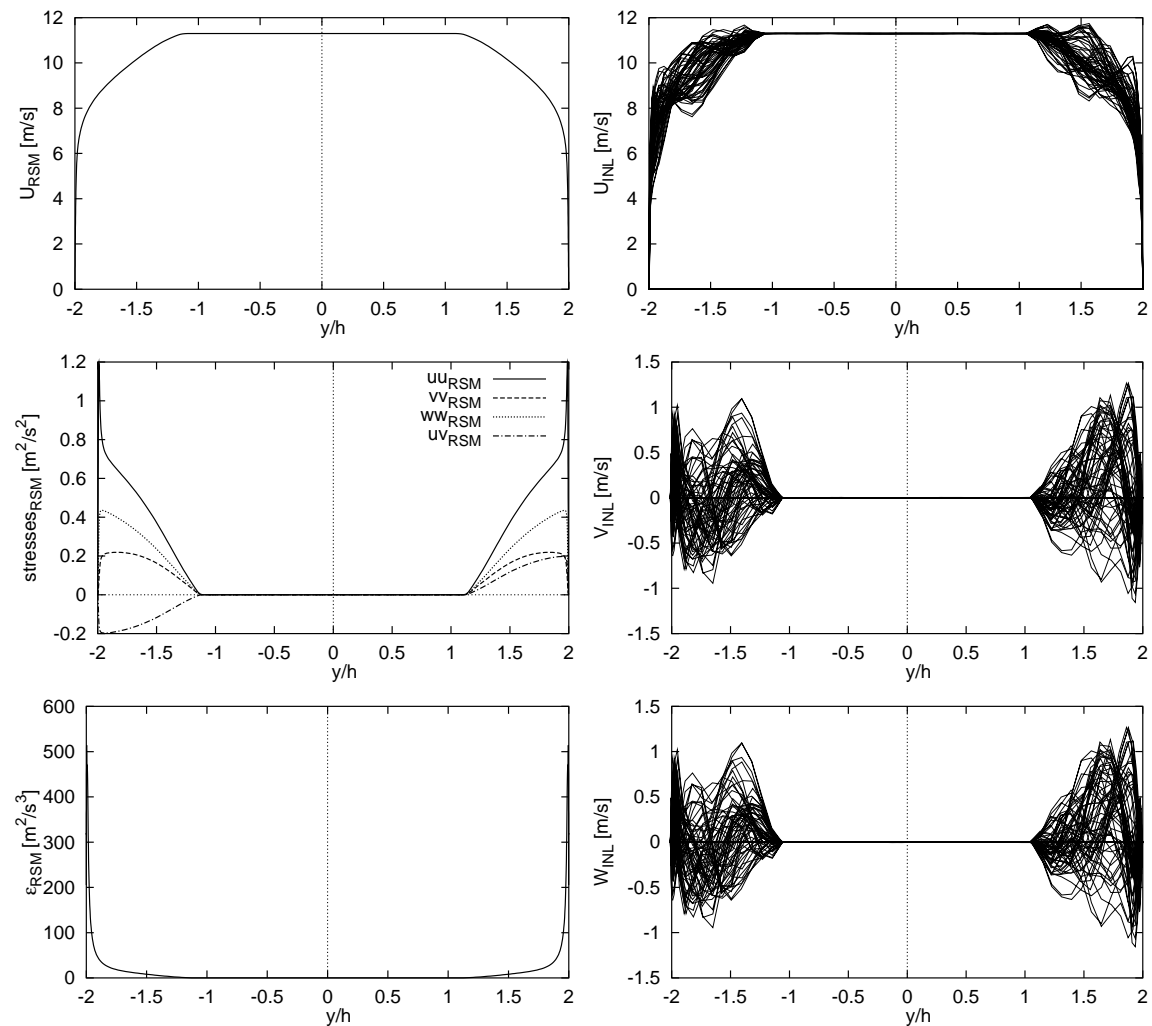


Abbildung 5.13: Einlassdaten für die Stufenströmung mit Wärmeübertragung (links: RSM-Ergebnis, rechts: daraus erzeugtes instationäres Geschwindigkeitsfeld)

nung mit Hilfe des Reynoldsspannungsmodelles gewonnene Ergebnis an der Stelle, die dem Einlass in das Problemgebiet entspricht. Die Dicke der Grenzschicht ist gut zu erkennen. Der Turbulenzgrad bei der freien Einströmung in den Zulauf wurde im Experiment mit $Tu = 0.2\%$ als sehr klein angegeben. Diesem wurde auch bei

der Simulation Rechnung getragen, so dass in dem Gebiet in der Mitte des Kanals, in das sich die Grenzschicht noch nicht ausgebreitet hat, die turbulenten Scheinspannungen verschwinden. Damit ergibt sich auch im erzeugten dreidimensionalen Geschwindigkeitsfeld dort ein Gebiet ohne Fluktuationen. Die Dissipationsrate ε wird zur Erzeugung der instationären Daten nur indirekt dafür benötigt, in Zusammenhang mit k eine Abschätzung für das charakteristische Längenmaß zu ergeben. Dieses wird bei der Filterung innerhalb der Erzeugungsroutine verwendet.

Zur Berechnung der Wärmeübertragung wird die untere Wand nach der Stufe mit einem Wärmestrom von $q_w = 270 \text{ W/m}^2$ geheizt. Die maximale Temperaturüberhöhung gegenüber der Einlasstemperatur beträgt damit ca. 6 %, so dass Temperaturabhängigkeitseffekte klein gehalten werden. Alle anderen Wände werden als adiabat betrachtet, also mit dem Wärmestrom $q_w = 0 \text{ W/m}^2$ beaufschlagt.

Die Diskretisierung des Rechengebietes erfolgt zunächst mit $112 \times 100 \times 64$ Punkten plus dem Kanaleinlass von $2h$ mit $12 \times 64 \times 64$ Punkten. Damit ist das Rechengitter (Abb. 5.14) mit etwa 760.000 Gitterpunkten ca. 3 mal gröber als das Gitter der LES von Akselvoll und Moin (1995). Wie auch schon bei der ersten Stufenströmung

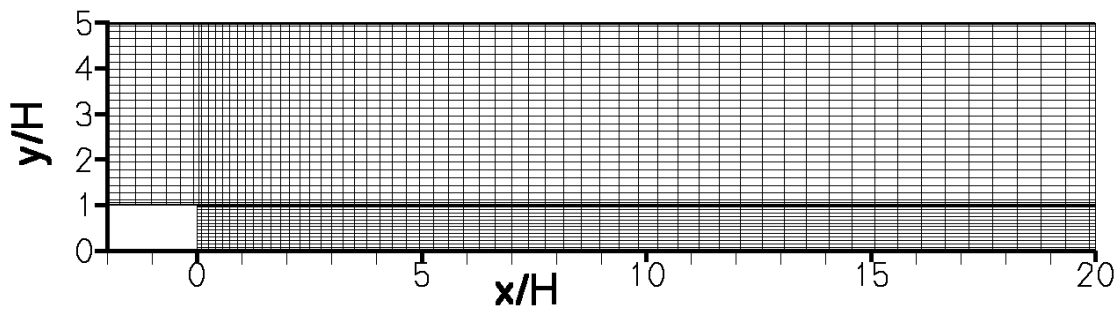


Abbildung 5.14: Gitter der berechneten zurückspringenden Stufe mit Wärmeübertragung, jeder 2. Punkt gezeigt

ist gut die Verdichtung der Punkte zur Ablösekante hin und in der Scherschicht zu erkennen. Insgesamt besteht das Gitter aus drei Blöcken, wobei ein großer Anteil an Gitterpunkten im unteren Block hinter der Stufe angesiedelt ist, obwohl er nur ein Viertel der Höhe des Blockes darüber besitzt. Eine Analyse der Gitterauflösung ist in Abb. 5.15 gezeigt. Entlang dreier horizontaler Linien werden der Anteil der modellierten turbulenten kinetischen Energie an der gesamten sowie die Filterweite über dem Kolmogorov'schen Längenmaß geplottet:

- in der Mitte des unteren Blocks innerhalb der Rückströmzone ($y/H = 0.53$): Entlang dieser Linie sind die höchsten Werte in beiden Diagrammen zu verzeichnen. Berücksichtigt man Abb. 5.17, so sieht man, dass diese Linie im Bereich der Trennfläche verläuft. Daher stimmt k^* gut mit den 20% überein, die durch die variable Positionierung des Interface dort vorgegeben werden. Ausgedrückt in Vielfachen der Kolmogorov-Länge bewegt sich die Filterweite um ca. 30. Die kleineren Werte am Anfang sind durch die Gitterverfeinerung zur senkrechten Wand hin begründet.

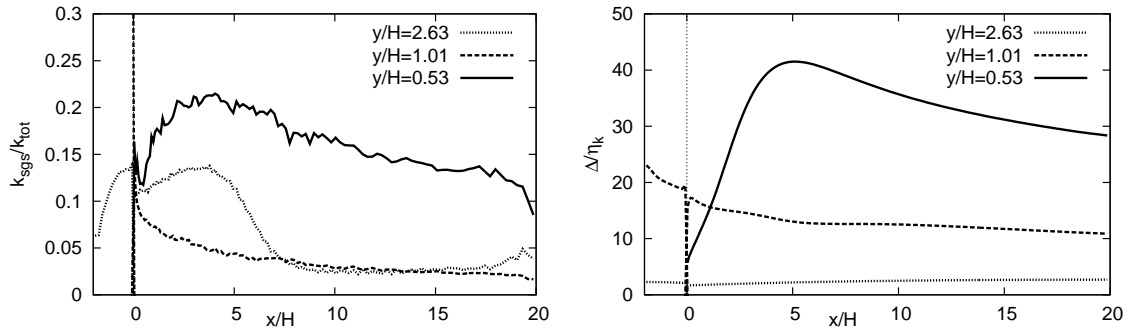


Abbildung 5.15: Abschätzung der Gitterqualität für die Stufenströmung mit Wärmeübertragung

- direkt über der unteren Wand des Zulaufkanals ($y/H = 1.01$): Der Bereich vor der Stufenkante liegt bei k^* außerhalb des Diagramms, also über 30%. Das ist nicht verwunderlich, denn so nah an der Wand befindet man sich innerhalb des RANS-Gebietes. Nach der Stufe verläuft diese Linie in der Scherschicht und zeigt, dass die Auflösung durch die Verdichtung der Zellen dort hoch ist. k^* bewegt sich bei 5% und auch Δ/η_k zeigt nur Werte von 10 – 15, was schon an eine gute LES-Auflösung herankommt.
- in der Mitte des Zulaufkanals ($y/H = 2.63$): Von der Filterweite her wird die Auflösung mit einem Verhältnis von 2 als sehr hoch angezeigt. Dies liegt vor allem daran, dass durch die niedrige Dissipation in der Kanalmitte η_k relativ groß wird. Auf der Seite der turbulenten kinetischen Energie sieht das etwas anders aus. Im Bereich der Rezirkulationszone werden noch ca. 10% der Energie modelliert, danach sinkt der Bruchteil auf einen Wert von 5% ab, was eher einer normalen LES-Auflösung als einer sehr hohen entspricht.

In einem zweiten Schritt wird das oben betrachtete Gitter in alle Raumrichtungen um den Faktor 2, also insgesamt um den Faktor 8 vergrößert ($56 \times 50 \times 32 + 6 \times 32 \times 32$). Damit ergibt sich die doppelte Filterweite, so dass man die Kurven in Abb. 5.15 rechts mit 2 multiplizieren kann, um einen Eindruck der Auflösung zu bekommen.

Die Positionierung mit Hilfe des variablen Interface wurde schon angesprochen. Da es sich um eine Strömung mit einer wesentlich höheren Reynolds-Zahl handelt, als im vorherigen Fall, ist zu erwarten, dass sich die Trennfläche bei einem höheren y^+ -Wert positioniert. Die Änderung der Position im Laufe der Rechnung, um den vorgeschriebenen Wert von $k^* = 20\%$ zu erreichen, ist in Abb. 5.16 dargestellt. Ähnlich der isothermen Stufenströmung oszilliert die Position nach einer bestimmten Anzahl an Zeitschritten um einen Wert von hier $y^+ \approx 230$. Einen Eindruck des physikalischen Verlaufs der Trennfläche an dieser Position gibt Abb. 5.17. Zusätzlich zum Interface wird als Kontur die momentane Temperatur illustriert, welche zum einen zeigt, dass Temperaturerhöhung nicht allzu stark ausfällt, wie es aufgrund der konstanten Stoffwerte auch erforderlich ist. Zum anderen erkennt man, dass die

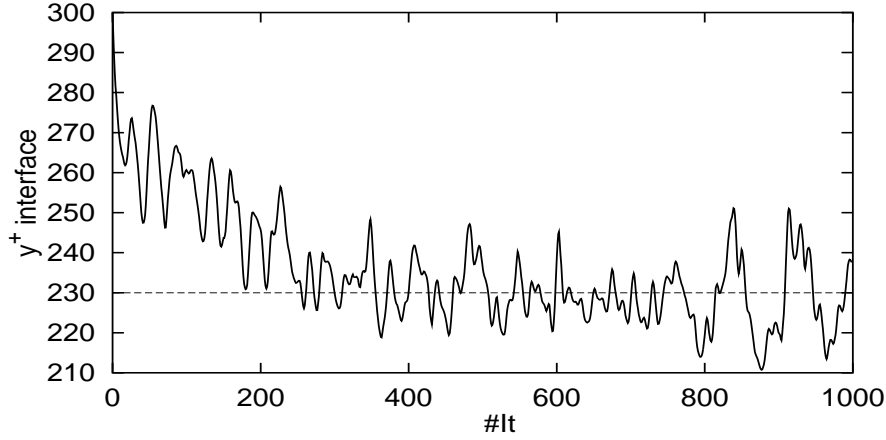


Abbildung 5.16: Änderung der Interface-Position mit variablem Interface beim back-step mit Wärmeübertragung

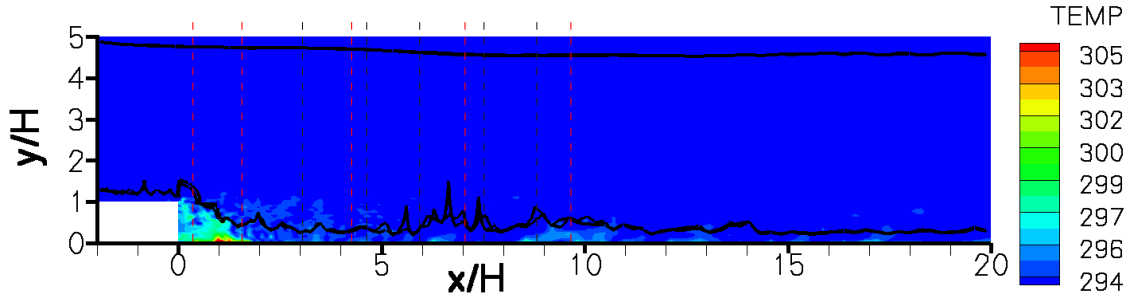


Abbildung 5.17: Interface-Verlauf bei $y^+ = 230$ auf Konturplot der Temperatur und Position der Schnittebenen für die Ergebnisdarstellung (rot: Temperaturfeld, schwarz: Geschwindigkeitsfeld)

Temperaturerhöhung nur in einem kleinen Bereich nahe an der Wand stattfindet. Der Großteil des Rechengebietes scheint die Einstömtemperatur beizubehalten. Aus diesem Grund liegt der komplette Bereich, in dem sich die Temperatur merklich erhöht, im RANS-Gebiet. Die beiden Peaks im Interface-Verlauf um $x/H \approx 7$ an der unteren Wand hängen mit der Position des Wiederanlegepunktes zusammen. Dieser befindet sich bei instationären Rechnungen nicht immer an der gleichen Stelle, sondern oszilliert in einem Bereich, der durchaus $\pm H$ betragen kann. Dieses instationäre Verhalten ist auch mitverantwortlich für die Oszillationen der Position der Trennfläche bei variablem Interface. Für das hybride Verfahren stellen diese Oszillationen jedoch einen positiven Nebeneffekt dar, da es somit keinen festen Punkt gibt, an dem die Wandschubspannung und damit die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ zu Null werden, was zu einem Problem mit der Definition des dimensionslosen Wandabstandes y^+ an dieser Stelle führen könnte. Erst durch die zeitliche Mittelung ergibt sich ein RANS-Rechnungen vergleichbarer fester Wiederanlegepunkt, dessen Position verschiedener Rechnungen im Vergleich mit dem Experiment in Tabelle 5.4 zusammengefasst wird. Auf dem ersten Gitter liegt das HLR-Ergebnis bei beiden Modellkombinationen sehr nahe am Experiment und an den Resultaten der dyna-

Modell	Wiederanlegelänge (H =Stufenhöhe)	Gitterpunkte [10^6]
Experiment	$6.7 \pm 0.1H$	—
LES (Dyn., Keating)	$6.74H$	3.1
LES (Dyn., Akselvoll)	$6.74H$	2.25
LES (Dyn., Keating)	$6.54H$	1.3
LES coarse (Smag.)	$6.3H$	0.76
LES coarse (Smag.+damping)	$6.46H$	0.76
HLR S/C	$6.78H$	0.76
HLR S/LS	$6.69H$	0.76
LES1 coarse (Smag.)	$4.65H$	0.095
LES1 coarse (Smag.+damping)	$4.83H$	0.095
HLR1 S/LS	$6.22H$	0.095
HLR1 S/LS forcing	$6.39H$	0.095
HLR1 S/C	$6.76H$	0.095
HLR1 S/C forcing	$6.81H$	0.095
RANS Chien $k-\varepsilon$ (2d)	$5.87H$	0.012
RANS Launder-Sharma $k-\varepsilon$ (2d)	$5.54H$	0.012
RANS $k-\varepsilon-\zeta-f$ (2d)	$7.24H$	0.012

Tabelle 5.4: Vergleich der Wiederanlegelängen verschiedener Modelle mit dem Experiment für die Stufenströmung bei hoher Reynoldszahl

mischen Smagorinsky-Berechnungen von Akselvoll und Moin (1995) sowie Keating (2004). Auffällig sind die Abweichungen der, den beiden hybriden Modellen zugrunde liegenden, RANS-Modelle Chien und Launder-Sharma $k-\varepsilon$. Umso interessanter ist es deshalb zu sehen, dass die Kombination der beiden Methoden, die für sich genommen große Abweichungen vom Experiment zeigen, im Rahmen der HLR-Methode ein wesentlich besseres Ergebnis liefert. Genau dieses Verhalten präsentiert sich auch in Abb. 5.18, in welcher der Verlauf des Reibungsbeiwertes C_f und der Stanton-Zahl St entlang der unteren Wand gezeigt wird.

$$C_f = \frac{2 \tau_w}{\rho U_c^2}, \quad St = \frac{q_w}{\rho c_p U_{ref} (T_w - T_{ref})} \quad (5.3)$$

Dabei ist die Stanton-Zahl eine charakteristische Größe für die Wärmeübertragung und beinhaltet im Prinzip den Wandtemperaturverlauf. Auf der linken Seite der Abbildung sieht man einen Vergleich von C_f und St für alle drei benutzten Berechnungsverfahren LES, HLR und RANS mit dem Experiment. Besonders auffällig in negativer Hinsicht sind die beiden RANS-Ergebnisse. Sie zeigen nicht nur große Abweichungen in der berechneten Wiederanlegeposition, sondern auch im generellen Verlauf der Kurven. Sowohl die Größe des negativen Peaks, als auch die Position des Maximalwertes im C_f -Verlauf unterscheiden sich sehr stark von den Referenzdaten. Hauptursache dafür ist die ihnen nicht mögliche Erfassung der schon oben angesprochenen instationären Oszillation der gesamten Rezirkulationszone. Die Problematik

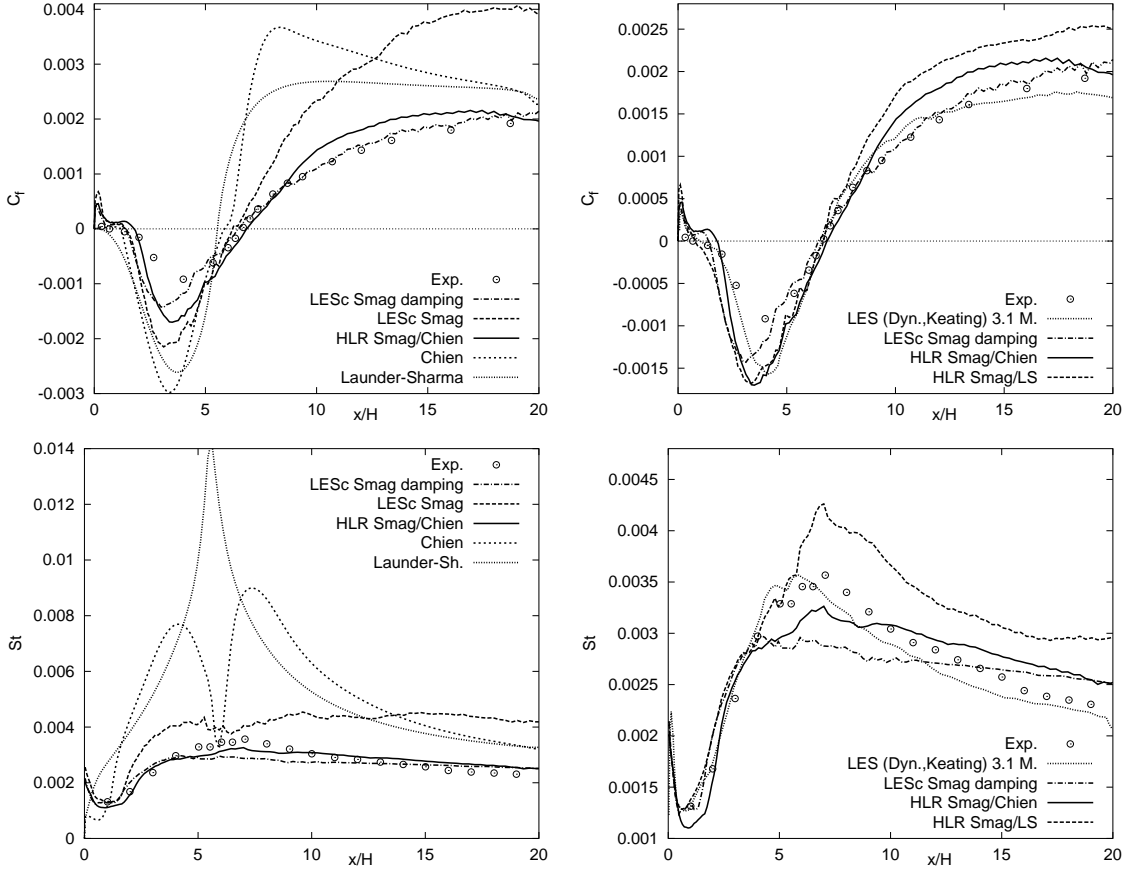


Abbildung 5.18: Reibungsbeiwert C_f und Stanton-Zahl St für den Fall mit Wärmeübertragung, links Vergleich von LES, HLR und RANS, rechts Vergleich von HLR mit anderer Skalierung

der festen Wiederanlegeposition wird auch im St -Verlauf deutlich, welcher an dieser Stelle für beide RANS-Modelle eine Art singulären Punkt aufweist. Während dieser im Falle von Launder-Sharma bei einem sehr hohen Wert liegt, zeigt sich bei Chien ein gegenüber den benachbarten Punkten sehr geringer Wert. Fairerweise muss jedoch betont werden, dass die Ergebnisse dieser Modelle nicht repräsentativ für RANS-Modelle generell zu sehen sind, denn durch Vorgabe bestimmter Längenskalenbeschränkungen, wie z. B. bei Durbins v^2 - f - oder Hanjalic's k - ε - ζ - f -Modell, können die Ergebnisse deutlich verbessert werden, was auch bereits in Tab. 5.4 zu erkennen ist. Ein sehr schlechtes Ergebnis wird auch von der LES auf dem groben, also zu HLR analogen Gitter, mit Smagorinsky-Modell ohne Dämpfung geliefert. Bei beiden Kennzahlen stellt sich eine extreme Überbewertung ein, welche deutlich macht, wie wichtig es ist, das Smagorinsky-Modell mit Dämpfung zu verwenden. Im Fall von C_f ergibt sich bei Berücksichtigung der Dämpfung ein sehr gutes Ergebnis, welches überraschenderweise sogar besser aussieht, als die dynamische Smagorinsky-Berechnung von Keating et al. [33] mit 3.1 Millionen Punkten. Die Kombination von Smagorinsky mit jeweils einem der beiden RANS-Modelle zeigt bezüglich des Wiederanlegepunktes eine Verbesserung dieses Ergebnisses (vgl. Tabelle 5.4). Im ge-

nerellen Verlauf des Reibungsbeiwertes liegt das HLR-Ergebnis betragsmäßig etwas weiter von den experimentellen Daten entfernt, als die groben LES. Im Fall von St ist die HLR-Methode leicht überlegen. Auf der rechten Seite der Abbildung sind die beiden Kennzahlen nochmals dargestellt. Im Unterschied zur linken Seite sind jedoch lediglich die passablen Ergebnisse und die experimentellen Referenzdaten eingetragen, damit eine besser Skalierung möglich ist. Es zeigt sich, dass auch diese Ergebnisse noch markante Abweichungen von den Experimenten aufweisen. Der betragsmäßig maximale negative Punkt wird bei C_f von allen Rechnungen nahezu 100% zu groß berechnet. In der Region nach dem Wiederanlegepunkt, in der sich die Grenzschicht neu bildet (Strömungserholung), zeigt vor allem die Kombination mit Launder-Sharma eine Überschätzung des Koeffizienten, was sich im St -Verlauf trotz guter Repräsentierung der Steigung wiederfindet. Die grobe LES zeigt diesbezüglich ein sehr schlechtes Verhalten, obwohl das Ergebnis im Reibungsbeiwert sehr gut ist. Die Kombination Smagorinsky mit Chien-Modell nähert das experimentelle Ergebnis am besten der Rechnungen auf diesem Gitter an. Trotzdem ist die Steigung im Gebiet der Strömungserholung zu flach.

Insgesamt gesehen liefert LES auf diesem Gitter demnach kein schlechteres Ergebnis als HLR. Dies hängt damit zusammen, dass die Auflösung der verwendeten Gitters für LES im Prinzip noch recht gut geeignet, also relativ hoch ist. Aus diesem Grund werden noch weitere Untersuchungen auf dem schon angekündigten vergrößerten Gitter durchgeführt. Diese Ergebnisse werden in Abb. 5.19 illustriert. Die

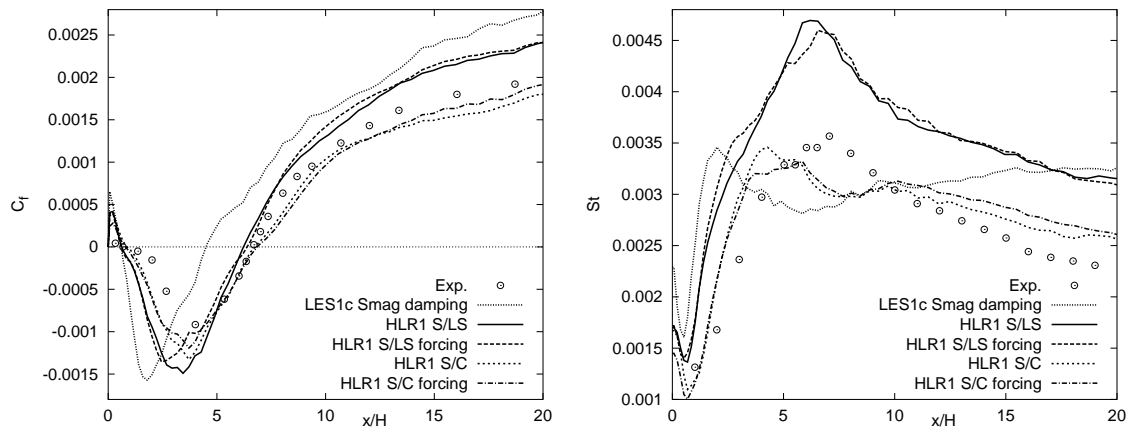


Abbildung 5.19: Reibungsbeiwert C_f und Stanton-Zahl St für den Fall mit Wärmeübertragung auf dem vergrößerten Gitter

dazugehörigen Wiederanlegelängen sind ebenfalls in Tabelle 5.4 aufgelistet. Es ist deutlich zu erkennen, dass LES bei dieser groben Auflösung sehr schlecht abschneidet. Der Wiederanlegepunkt wird viel zu weit vorne berechnet und C_f im Gebiet der Grenzschichtneubildung überbewertet. Das hybride Verfahren in der Kombination Smag/Chien dagegen zeigt immer noch einen sehr guten, die Kombination mit Launder-Sharma einen geringfügig schlechteren aber noch durchaus akzeptablen Verlauf. Ähnliches gilt auch bei St , jedoch zeigt die Kombination mit Chien-Modell eine Schwäche in der Umgebung des Maximalwertes. In Abb. 5.19 sind weiterhin

die Ergebnisse von Berechnungen unter Benutzung der forcing-Methode dargestellt. Die Änderung gegenüber der jeweiligen Berechnung ohne forcing fallen jedoch gering aus und sind nicht mit der Auswirkung des forcing im Fall der Kanalströmung zu vergleichen. Dies liegt zum einen daran, dass in dieser Darstellung die Trennfläche nicht überschritten wird, sondern eine Linie ganz nah an der Wand im RANS-Gebiet betrachtet wird. Zum anderen ist die Wirkung bei der Stufenströmung, welche nicht so stark durch Wandeffekte beeinflusst wird wie der Kanal generell geringer. Eine Situation, bei welcher das Interface überschritten wird, ist für das Strömungsfeld in Abb. 5.20 mit dem gemittelten Geschwindigkeitsprofil, sowie der Reynoldsspannungskomponente in Strömungsrichtung und der Schubspannungskomponente $\overline{u'v'}$ an in Abb. 5.17 angedeuteten Schnitten gezeigt.

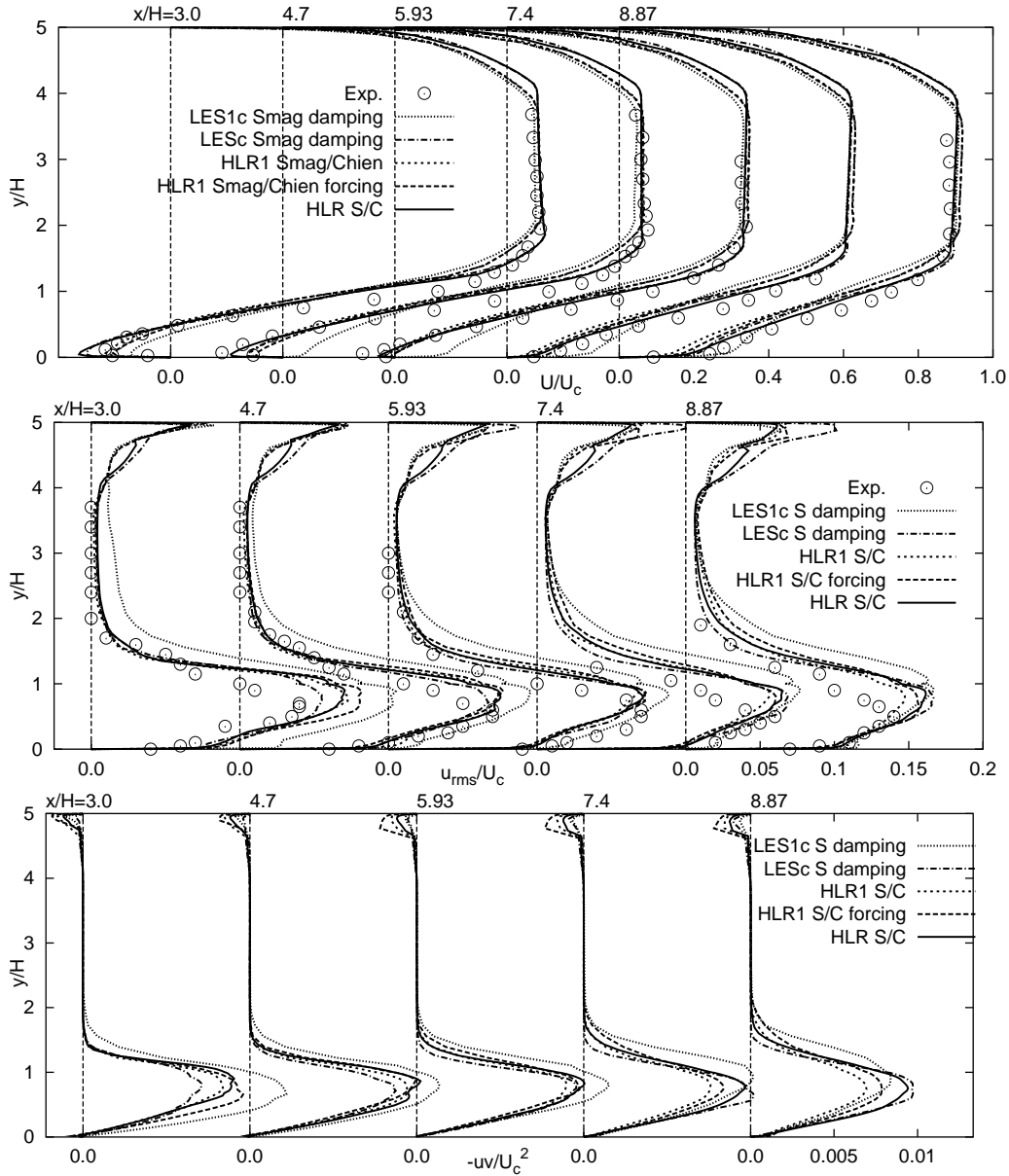


Abbildung 5.20: Mittlere Strömungsgeschwindigkeit, Normalspannung und Schubspannung für den Fall mit Wärmeübertragung

Verglichen werden die hybride Rechnung in der Kombination Chien und Smagorinsky auf dem vergrößerten Gitter mit LES auf beiden Gittern und dem Experiment. Anhand der Axialgeschwindigkeit ist deutlich die schon im Fall des Reibungsbeiwertes beobachtete Schwäche der LES auf dem vergrößerten Gitter zu erkennen. Beim hybriden Verfahren sind trotz Überschreiten des Interface weder bei der Berechnung mit noch bei der ohne forcing Knicke im Profil erkennbar. Gemäß Abb. 5.17 müssten diese bei $y/H \approx 4.8$ an der oberen und $y/H \approx 0.3$ an der unteren Wand liegen. Das forcing zeigt hier nur einen geringen Einfluss, der jedoch eine leichte Verbesserung im Gebiet der Grenzschichtneubildung hinter dem Wiederanlegepunkt bewirkt. Bei $\overline{u'u'}$ setzt sich die Schwäche der vergrößerten LES fort, zum einen liegt das Level an Fluktuationen generell zu hoch, zum anderen beginnt die Zone mit erhöhten Fluktuationen im Bereich der Scherschicht zu früh. Das Ergebnis der HLR-Methode liegt nah an dem der feineren LES, wenn auch im ersten Schritt ein etwas höheres Level an Fluktuationen zu verzeichnen ist. Der $\overline{u'v'}$ -Verlauf bringt qualitativ das gleiche Ergebnis, eine quantitative Aussage ist aufgrund fehlender Referenz-Daten nicht möglich. Beim Temperaturverlauf präsentiert sich HLR an der Stelle $x/H = 0.33$ sogar besser als LES auf dem feineren Gitter. Bei weiter hinten liegenden Schnitten sind die Ergebnisse vergleichbar. LES auf den groben Gitter ist hier weit abgeschlagen. Die rms-Werte der Temperatur werden von keiner Berechnung richtig erfasst, HLR auf dem groben Gitter und LES auf dem feineren liegen aber auch hier bei sehr ähnlichen Werten.

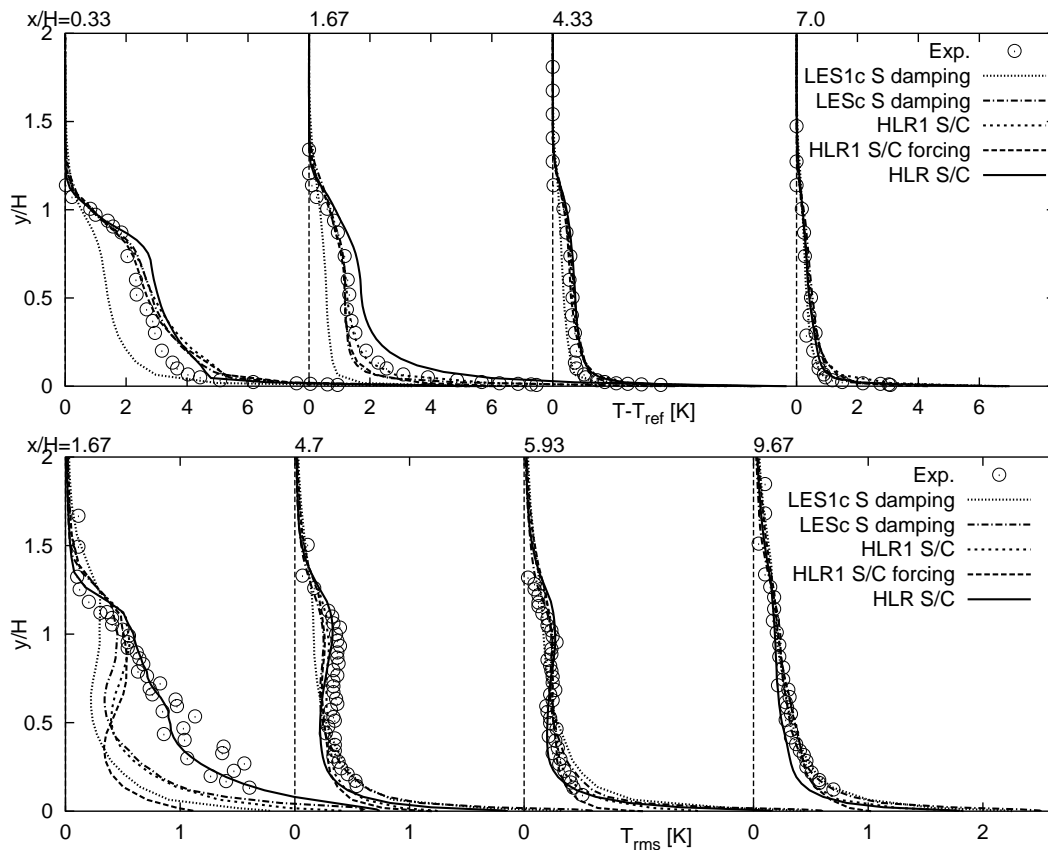


Abbildung 5.21: Gemittelte Temperaturverteilung und Varianz für den Fall mit Wärmeübertragung

5.2.3 Berechnung mit Wärmeübertragung und variablen Stoffwerten

Bei den hohen Temperaturen, die in einer Brennkammer anzutreffen sind, können die Stoffwerte nicht mehr als konstant angenommen werden. Die Temperaturabhängigkeit bringt jedoch zusätzliche Probleme mit sich, allen voran hinsichtlich der Konvergenz der Lösung. Dieses Verhalten soll im letzten Testfall der Stufenströmung untersucht werden.

Als Vergleichsfall wurde die LES von Avancha und Pletcher bei $Re_H = 5540$ (Stufenhöhe $H = 0.041\text{ m}$) gewählt. Zu dieser Konfiguration führten Kasagi und Matsunaga 1995 bereits isotherme Experimente durch [35]. Unglücklicherweise ist die Reynoldszahl nicht so hoch, wie es für das hybride Verfahren wünschenswert wäre, es konnten jedoch keine Literatur-Fälle mit variablen Stoffeigenschaften bei höheren Reynoldszahlen gefunden werden. Wie im Fall der Stufenströmung bei hoher Reynoldszahl wird die untere Wand hinter der Stufe geheizt. Neben dem isothermen Fall ($\dot{q} = 0\text{ kW/m}^2$) werden drei verschiedene Wärmeströme berechnet: $\dot{q} = 1\text{ kW/m}^2$, $\dot{q} = 2\text{ kW/m}^2$ oder $\dot{q} = 3\text{ kW/m}^2$. Die Temperaturabhängigkeit der Stoffgrößen wird mittels Potenzgesetz-Formulierungen beschrieben:

$$\frac{\mu}{\mu_{ref}} = \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{0.71}, \quad \frac{\lambda}{\lambda_{ref}} = \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{0.71} \quad (5.4)$$

Die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p wird aufgrund der trotz der starken Aufheizung geringen Änderung als konstant angenommen. Die Dichte wird über die ideale Gasgleichung bestimmt. Die Referenzwerte und einige weitere Angaben zur Strömung sind in Tabelle 5.5 zusammengefasst. Erwähnenswert ist noch, dass die Prandtl-Zahl ebenfalls konstant bleibt. Dies liegt zum einen daran, dass c_p konstant bleibt, zum anderen daran, dass für die Temperaturabhängigkeit von μ und λ die gleiche Potenzfunktion verwendet wird. Dies ist gleichbedeutend damit, dass das Verhältnis der Dicken der Temperatur- und Geschwindigkeitgrenzschicht trotz Heizung konstant bleibt. Da jedoch die Temperaturabhängigkeit von c_p generell nicht sehr stark ist und sich andere, häufig verwendete Exponenten in den Potenzfunktion nicht sehr von denen in (5.4) unterscheiden, ergäbe sich ohnehin nur eine geringe Änderung.

Referenz-Stoffwerte	Einlass-(Kanal-)Strömung
$\mu_{ref} = 1.823 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$	$U_{ref} = U_c = 2.063\text{ m/s}$
$\lambda_{ref} = 0.02574\text{ W/(m K)}$	$Re_\tau = 290$
$c_{p,ref} = c_p = 1006\text{ J/(kg K)}$	$u_\tau = 0.108\text{ m/s}$
$\rho_{ref} = 1.194\text{ kg/m}^3$	$\frac{\partial p}{\partial x} = 0.34\text{ N/m}^3$
$Pr_{ref} = Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = 0.7125$	$T_{ref} = 293\text{ K}$

Tabelle 5.5: Daten der Strömung über eine zurückspringende Stufe mit Wärmeübertragung und variablen Stoffwerten

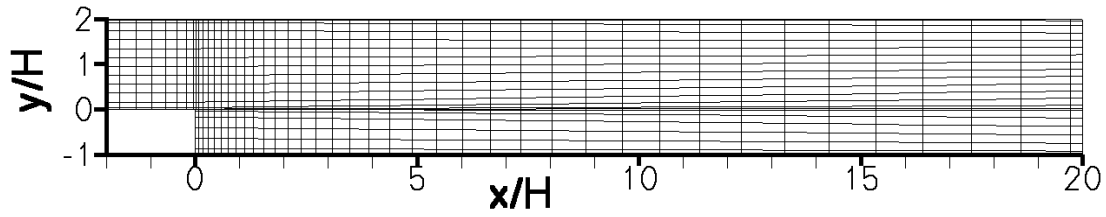


Abbildung 5.22: Gitter der berechneten zurückspringenden Stufe mit Wärmeübertragung und variablen Stoffwerten, jeder 2. Punkt gezeigt

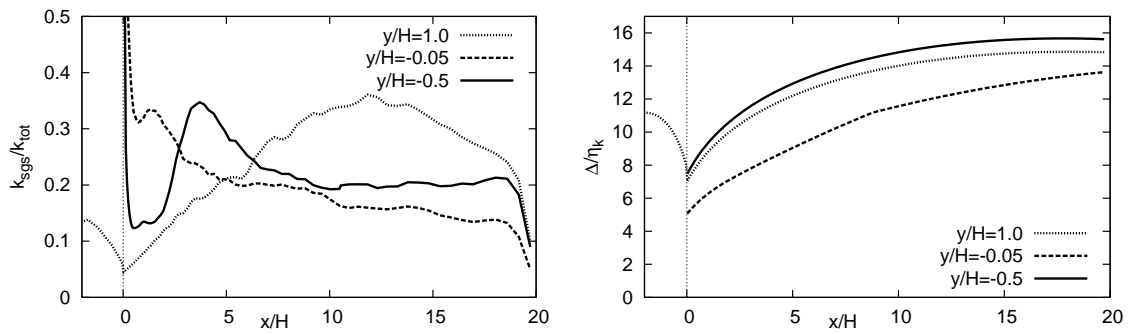


Abbildung 5.23: Abschätzung der Gitterqualität für die Stufenströmung mit Wärmeübertragung und variablen Stoffwerten

Für alle Wärmeströme wird das gleiche Gitter verwendet, welches im Fall dieser Strömung aus $72 \times 42 \times 40$ Punkten, plus $14 \times 28 \times 40$ Punkten in der Einlassregion bis zur Stufe besteht und somit ca. 136.000 Kontrollvolumen entspricht. Wie auch die beiden vorherigen Gitter besteht es aus drei Blöcken und ist im Gebiet um die Stufenkante und in der Scherschicht verfeinert. Die Abschätzung der Gitterauflösung ist in Abb. 5.23 illustriert. Die Parameter k^* und Δ/η_k sind entlang der x -Achse an den drei y -Positionen $y/H = -0.5$, $y/H = -0.05$ und $y/H = 1$ aufgetragen, entsprechend der drei Stellen innerhalb der Rezirkulationszone, in der Scherschicht und in der Kanalmitte des Einstroms. Da die ersten beiden in der Nähe der vertikalen Wand im RANS-Gebiet liegen, ist der k^* -Wert in diesem Bereich sehr hoch. Im folgenden nähert er sich jedoch gut dem Wert von 20 % an, der in diesem Gebiet auch vorgeschrieben wurde. Bedingt durch die Verdichtung der Zellen zur Stufenkante hin, nimmt k^* in der Einstrommitte zunächst ab, dann wieder zu. Nach $x/H \approx 12$ stellt sich mehr und mehr wieder eine normale Kanalströmung ein, so dass $|S|$ und damit auch k_{SGS} abnehmen. Die Werte für das Verhältnis von Filterweite zu Kolmogorov'schem Längenmaß bewegen sich relativ einheitlich in einem Bereich von 5–15, was einer normalen LES-Auflösung entspricht. Daher scheint das Gitter recht fein zu sein, obwohl 136.000 Gitterpunkte für eine 3D-Simulation mit Integration bis zur Wand nicht viel erscheinen. Weiterhin ist deutlich die Gitterverfeinerung bzw. Gitterexpansion in den verschiedenen Bereichen zu erkennen.

Ein besonderer Effekt, der bei dieser Strömung auftritt, ist die starke Vergrößerung des negativen Peaks im C_f -Verlauf direkt hinter der Stufe. Zunächst wird

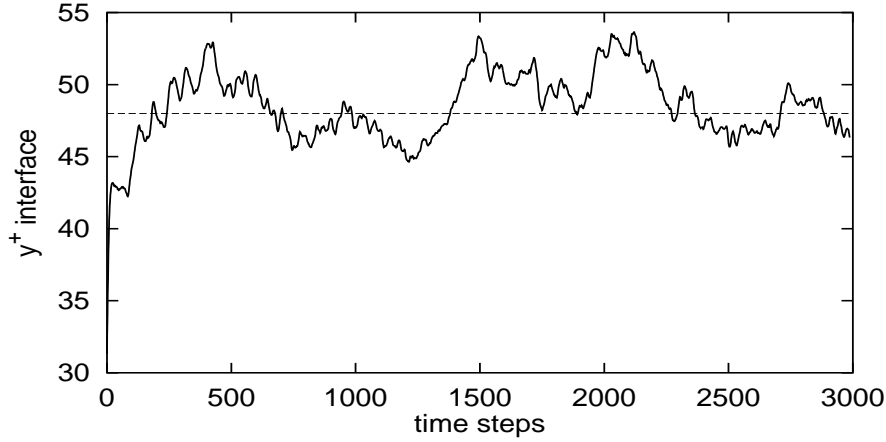


Abbildung 5.24: Änderung der Interface-Position mit variablem Interface beim back-step mit Wärmeübertragung und variablen Stoffwerten

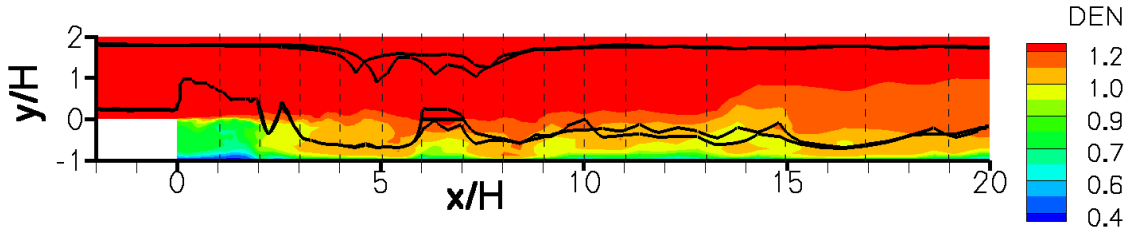


Abbildung 5.25: Interface Verlauf bei $y^+ = 48$ auf Konturplot der Dichte bei 3 kW und Position der Schnittebenen für die Ergebnisdarstellung

aber anhand des isothermen Falles auf die generellen Eigenschaften der Strömung eingegangen. Die Interface-Position stellt sich bei $y^+ \approx 48$ ein (Abb. 5.24). Interessanterweise ändert sich diese Position auch nicht wesentlich, wenn die untere Wand geheizt wird, so dass diese Position für alle Wärmeströme beibehalten wird. In Abb. 5.25 sind beispielhaft für zwei unterschiedliche z -Positionen die Verläufe der Trennfläche bei $y^+ = 48$ dargestellt. Man erkennt, dass sie zum Teil relativ unterschiedlich verlaufen, was die Dreidimensionalität der Interfacefläche unterstreicht. Dies liegt daran, dass für y^+ der Momentanwert der Geschwindigkeit ausschlaggebend ist. Im Vergleich zur vorherigen Stufenströmung erkennt man zusätzlich, dass das RANS-Gebiet gegenüber dem LES-Gebiet wesentlich größer ist. Auch hier ist es so, dass nahezu der gesamte Bereich, in dem die Temperatur wesentlich erhöht wird, im RANS-Gebiet gelegen ist. Dies kann man anhand der gezeigten Variation der Dichte, welche über die ideale Gasgleichung direkt mit der Temperaturänderung verknüpft ist, erkennen. An dieser Stelle sei noch auf den geringen Wert der Dichte hingewiesen, welcher bei einer Entfernung von $x/H \approx 1$ von der senkrechten Wand nur noch etwa ein Drittel des Einstromwertes beträgt. Die dafür nötige Temperatur beträgt um 900 K , worauf im Folgenden aber noch eingegangen wird.

Die Einstromdaten für die Simulation stammen aus einer separaten Kanalströmungsberechnung. Wie jedoch das Experiment der isothermen Strömung [35] zeigt, ist die kanaltypische Reynoldszahl Re_τ vor der Stufenkante (unten) bzw. auf der

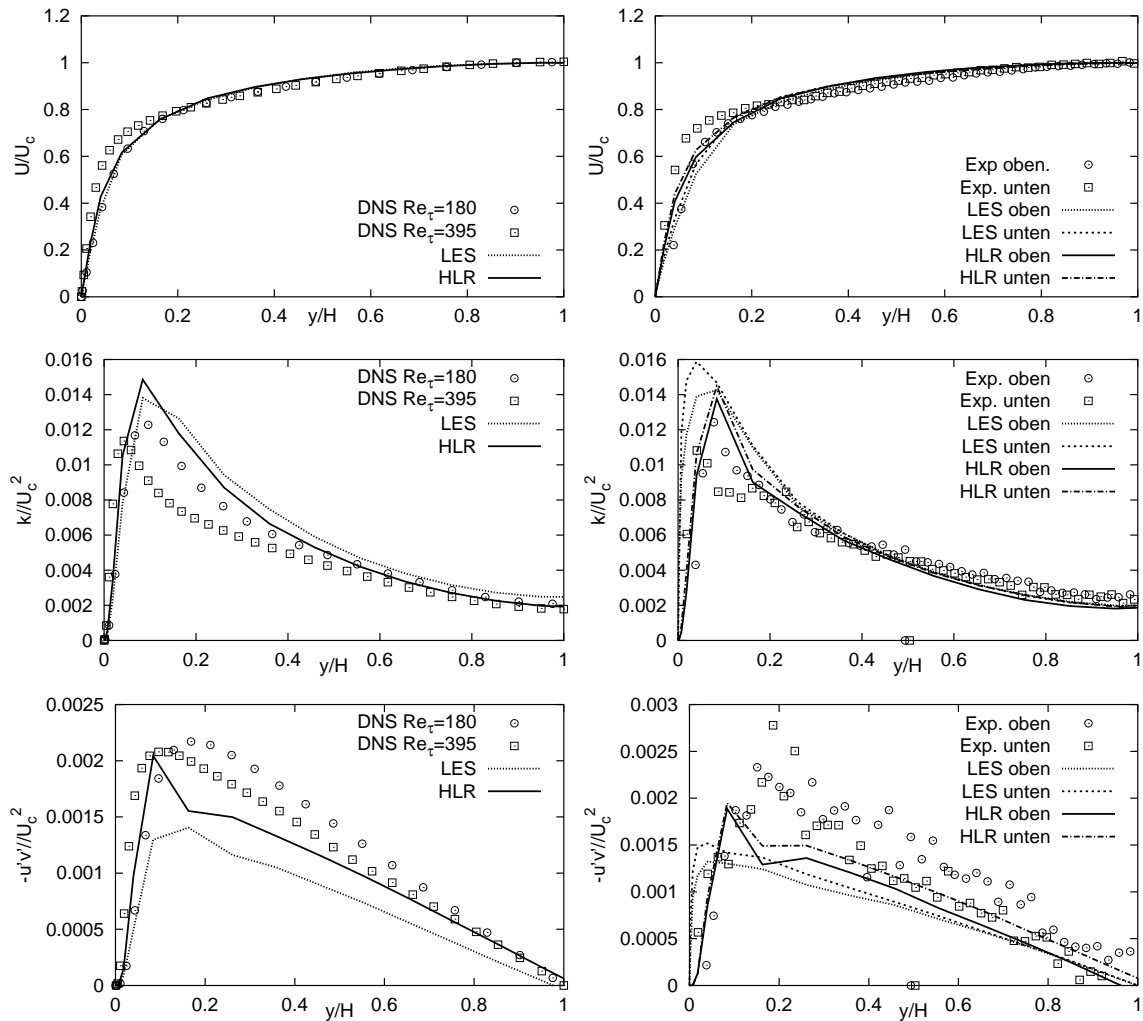


Abbildung 5.26: Vergleich der Einstromdaten aus der Kanalströmung mit DNS (links) und direkt vor der Stufenkante mit dem Experiment

gegenüberliegenden Seite (oben) nicht gleich groß. Während sich für oben ein Wert von $Re_\tau \approx 180$ präsentiert, stellt sich unten ein höherer Wert von $Re_\tau \approx 290$ ein, was durch die Rückwirkung der Stufe begründet ist. Mit anderen Worten bedeutet es, dass das Profil an der Stufenkante nicht symmetrisch ist. Das Profil, welches als Ergebnis der separaten Kanalströmung erhalten wird, ist aber i. A. symmetrisch. Die separate Strömung wird deshalb so gestaltet, dass die Reynoldszahl Re_c basierend auf der Geschwindigkeit in der Kanalmitte mit der Reynoldszahl der Stufenströmung von $Re_H = Re_c = u_c H / \nu_{ref} = 5540$ übereinstimmt. Damit ergibt sich eine entsprechende Reynoldszahl basierend auf u_τ von $Re_\tau \approx 250$. In Abb. 5.26 links ist das Ergebnis dieser Berechnung für LES und HLR dargestellt. Da dies ein eher untypischer Wert ist, für den es keine DNS-Vergleichsdaten gibt, sind die am nächsten daran liegenden verfügbaren Datensätze mit $Re_\tau = 180$ bzw. $Re_\tau = 395$ zum Vergleich geplottet. Man erkennt, dass das Ergebnis näher an $Re_\tau = 180$ liegt, was bei dem vorgegebenen Wert von $Re_\tau \approx 250$ auch vernünftig erscheint. Beide Rechnun-

gen liegen bei der Bestimmung von k jedoch noch oberhalb der DNS. Bei $\overline{u'v'}$ liegen sie etwas zu niedrig, wobei das hybride Verfahren trotz der geringen Reynoldszahl schon etwas besser abschneidet.

Auf der rechten Seite von Abb. 5.26 sind die tatsächlichen Verläufe in den endgültigen Rechnungen von LES und HLR kurz vor der Stufenkante unten und auf der gegenüberliegenden Seite oben im Vergleich mit den isothermen Experimenten illustriert. Es ist zunächst zu erkennen, dass der Unterschied zwischen dem oberen und dem unteren Profil nicht so ausgeprägt ist, wie im Experiment. Die Einlaufstrecke von $2H$ reicht demnach nicht aus, aus dem vorgegebenen symmetrischen Profil am Einlass die gleiche Asymmetrie wie im Experiment zu erzeugen. Für genauere Untersuchungen des Einflusses dieser Tatsache müssten längere Einläufe getestet werden. Da es in der Arbeit jedoch vorrangig um das Testen des hybriden Verfahrens geht, werden die Berechnungen zum besseren Vergleich analog den Referenzberechnungen von [2] durchgeführt und mit der Einlauflänge von $2H$ mit vorhergehender periodischer Kanalströmung gerechnet.

Abb. 5.27 rechts zeigt den Vergleich des so erreichten gemittelten Stromlinienbildes hinter der Stufe zwischen der hybriden Methode mit dem Experiment. Insgesamt stimmen die beiden Bilder gut überein und zeigen sowohl die primäre, als auch die kleinere, sekundäre Rezirkulationsblase an der Wand. Es wird jedoch ersichtlich, dass die Wiederanlegelänge im Fall der hybriden Rechnung etwas größer ist ($x_R/H = 6.9$), als im Experiment ($x_R/H = 6.51$). Auch der Anlegepunkt der sekundären Blase wird etwas zu groß berechnet, so dass die Rezirkulationszone zwar die richtige Größe hat, aber in Strömungsrichtung etwas verschoben ist.

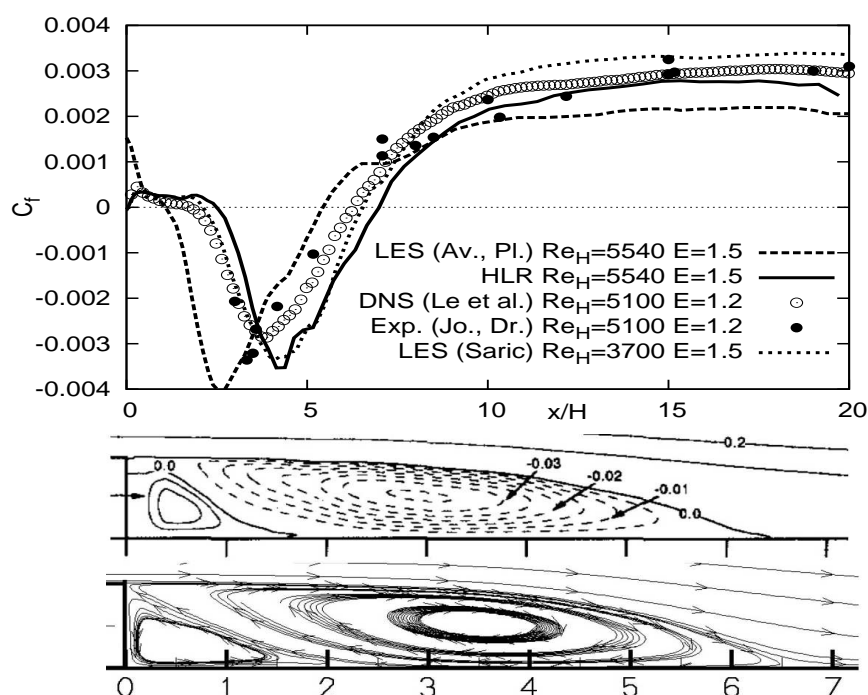


Abbildung 5.27: Vergleich verschiedener C_f -Verläufe bei ähnlichen Reynoldszahlen und Expansionsverhältnissen

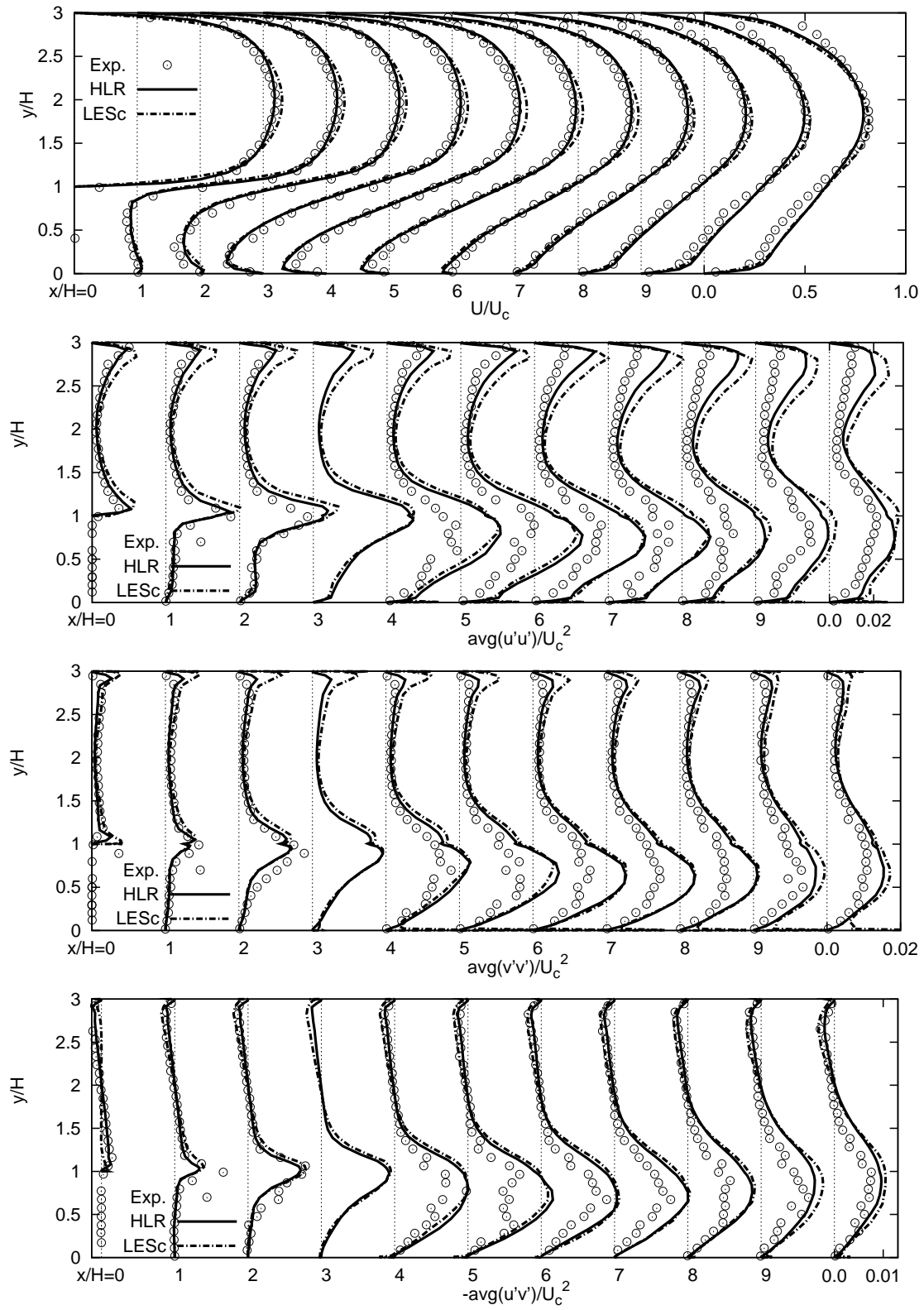


Abbildung 5.28: Geschwindigkeitsfeld und turbulente Spannungen der Stufenströmung mit variablen Stoffwerten im isothermen Fall

In Bezug auf den Wiederanlegepunkt sind in Zusammenhang mit den LES-Vergleichsdaten von Avancha und Pletcher Unstimmigkeiten aufgetreten. Während in der Veröffentlichung [2] von einer mittleren Wiederanlegelänge von $x_R/H \approx 6.1$ im isothermen Fall gesprochen wird, zeigen Ergebnisse von Avancha (2001) für diesen Fall einen C_f -Wert von Null bei $x_R/H \approx 5.4$ (Abb. 5.27 links). Da der C_f -Verlauf der experimentellen Daten [35] leider nicht verfügbar war, werden zum Vergleich die Ergebnisse einiger anderer experimenteller (Jovic und Driver, 1993) und numerischer Untersuchungen (DNS: Le et al., 1997; LES: Saric et al., 2005) von Stufenströmungen bei vergleichbaren Reynoldszahlen und Expansionsraten dargestellt. Der Verlauf des HLR-Ergebnisses passt relativ gut zu den anderen Daten, wenn auch insgesamt etwas in Strömungsrichtung verschoben. Die Daten von Avancha und Pletcher liegen jedoch bei sehr viel kürzeren Längen. Außerdem scheint schon im isothermen Fall der negative Peak stärker ausgeprägt zu sein, als bei allen anderen Rechnungen. In der Region der Strömungserholung zeigt sich dafür ein zu kleiner Wert. Auch das starke Ansteigen des C_f -Wertes zur vertikalen Wand (Null) hin stellt einen für Stufenströmungen untypischen Verlauf dar, zumal direkt in der unteren Ecke C_f per Definition gleich Null sein sollte.

Abbildung 5.28 zeigt die isothermen Ergebnisse des gemittelten Geschwindigkeitsfeldes und der turbulenten Spannungen im Vergleich zum Experiment anhand einer periodischen x -Achse an den in Abb. 5.25 angedeuteten Schnittpositionen. Insgesamt ist eine sehr gute Übereinstimmung zu erkennen, wobei das hybride Verfahren etwas besser abschneidet, als LES auf dem gleichen Gitter. Eine leichte Schwäche zeigen beide Verfahren im Gebiet der Strömungserholung im unteren Bereich. Der Unterschied in der Wiederanlegelänge wird kaum sichtbar, lediglich der Schnitt bei $x/H = 6$ lässt eine Vermutung einer Abweichung zu. Bei den turbulenten Spannungen gestaltet sich die Situation ähnlich. Das hybride Verfahren zeigt eine bessere Übereinstimmung, LES überschätzt die Größe der Spannung, vor allem die von $\overline{u'u'}$. Dies ist ein typisches Verhalten bei LES auf größeren Gittern. Es wird dadurch verursacht, dass durch einen frühen „cut off“ im Energiespektrum die Dissipation unterschätzt und somit zu viel Turbulenz vorhergesagt wird. Die Knicke, welche im Prinzip bei allen Spannungsprofilen vorhanden sind, bei $\overline{v'v'}$ aber am stärksten zu Tage treten, sind nicht mit der Position der Trennfläche verknüpft. Sie finden ihre Entstehung im modellierten Teil der Spannungen bzw. genauer der modellierten turbulenten kinetischen Energie, in welcher die Filterweite Δ Verwendung findet (vgl. (4.27) S.89).

Eine interessante Beobachtung kann gemacht werden, wenn man sich aus dieser Darstellung einen Schnitt in der Rückströmzone ($x/H \approx 2$) und weiter stromab, wo sich die Strömung wieder beruhigt hat ($x/H \approx 16$) herausgreift und sie im Vergleich zum logarithmischen Wandgesetz darstellt (Abb. 5.29). Man erkennt sofort, wie wichtig es ist, bei dieser Strömung bis zur Wand hin zu integrieren. Besonders in der Rückströmzone ist die Abweichung des wahren Geschwindigkeitsprofils vom logarithmischen Wandgesetz enorm. Aber auch weit weg von der Stufe, in dem Gebiet, in dem sich die Strömung wieder erholt hat, wird das idealisierte Gesetz immer noch nicht erreicht, wie die experimentellen Daten zeigen. Neben dem hybriden Verfahren ist noch das Ergebnis eines low-Re Reynoldsspannungsmodells eingetragen,

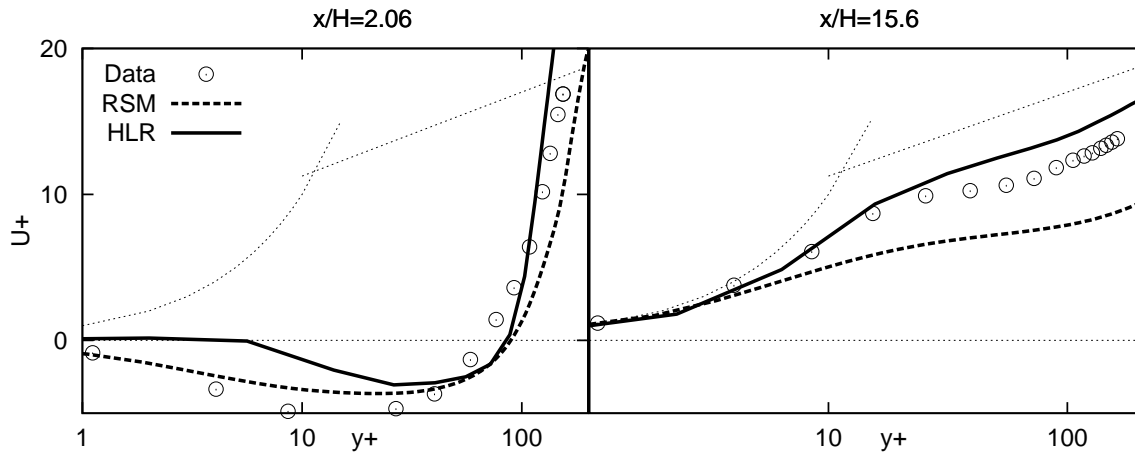


Abbildung 5.29: Dimensionslose Geschwindigkeit in logarithmischer Darstellung im Vergleich mit dem Wandgesetz an zwei ausgewählten Schnitten

wodurch verdeutlicht wird, wie gut die Vorhersage des hybriden Verfahrens an diesen Stellen ist. Leider weicht das hybride Ergebnis im Anfangsbereich des Schnittes bei $x/H \approx 2$ relativ stark von den Experimenten und auch dem RS-Modell ab. Dies liegt daran, dass der Wiederanlegepunkt der zweiten, kleineren Rezirkulationszone zu weit hinten berechnet wird. Dadurch liegt die Geschwindigkeit an dieser Stelle nicht im negativen Bereich, sondern gerade noch bei ungefähr Null.

Nach der ausführlichen Behandlung der isothermen Strömung soll nun auf die Ergebnisse in Bezug auf Wärmeübertragung eingegangen werden. In Abb. 5.30 oben ist an den gleichen Schnitten wie vorher die mittlere Geschwindigkeit, jetzt für den Fall der Heizung mit 3 kW illustriert, zum Vergleich ist aber noch das isotherme Experiment eingetragen. LES und HLR liegen noch enger zusammen, als im isothermen Fall. Bedingt durch die Heizung ändern sich die Profile. Ein Vergleich mit (5.28) zeigt, dass sich der Wiederanlegepunkt leicht nach vorne verschiebt und das Profil in dem dahinterliegenden Gebiet der Strömungserholung im unteren Bereich etwas bauchiger ist, dort also größere Geschwindigkeiten vorliegen. Dies wird durch die geringere Dichte aufgrund der Heizung verursacht. Damit der Massenstrom, der vorne eintritt abgeführt werden kann, muss die Geschwindigkeit zunehmen. Das Reynoldsspannungsmodell bleibt davon relativ unbeeindruckt und folgt eher der isothermen Kurve. Die Temperaturverläufe sind im Gegensatz zu den anderen Plots nur bis zu einer Höhe von $y/H = 0.7$, also bis knapp unter die Stufenhöhe, dargestellt, denn darüber sind die Auswirkungen der Heizung auf die Temperatur der Strömung gering. Sowohl HLR, als auch RSM zeigen eine sehr gute Übereinstimmung beim generellen Verlauf sowie bei der Bestimmung der Wandtemperatur. Bei LES ist diese am Anfang zu hoch, nach hinten heraus eher zu niedrig. Bei den Reynoldsspannungen präsentieren sich LES und HLR gleichwertig. Bei $\overline{u'T'}$ liegen beide sehr nah an den LES-Daten von Avancha und Pletcher. Im Fall von $\overline{v'T'}$ ist die Abweichung zur Wand hin dahingehend recht groß, dass der Reynoldsspannungsfluss überschätzt wird. Das Reynoldsspannungsmodell zeigt bei beiden Flüssen viel zu große Werte an.

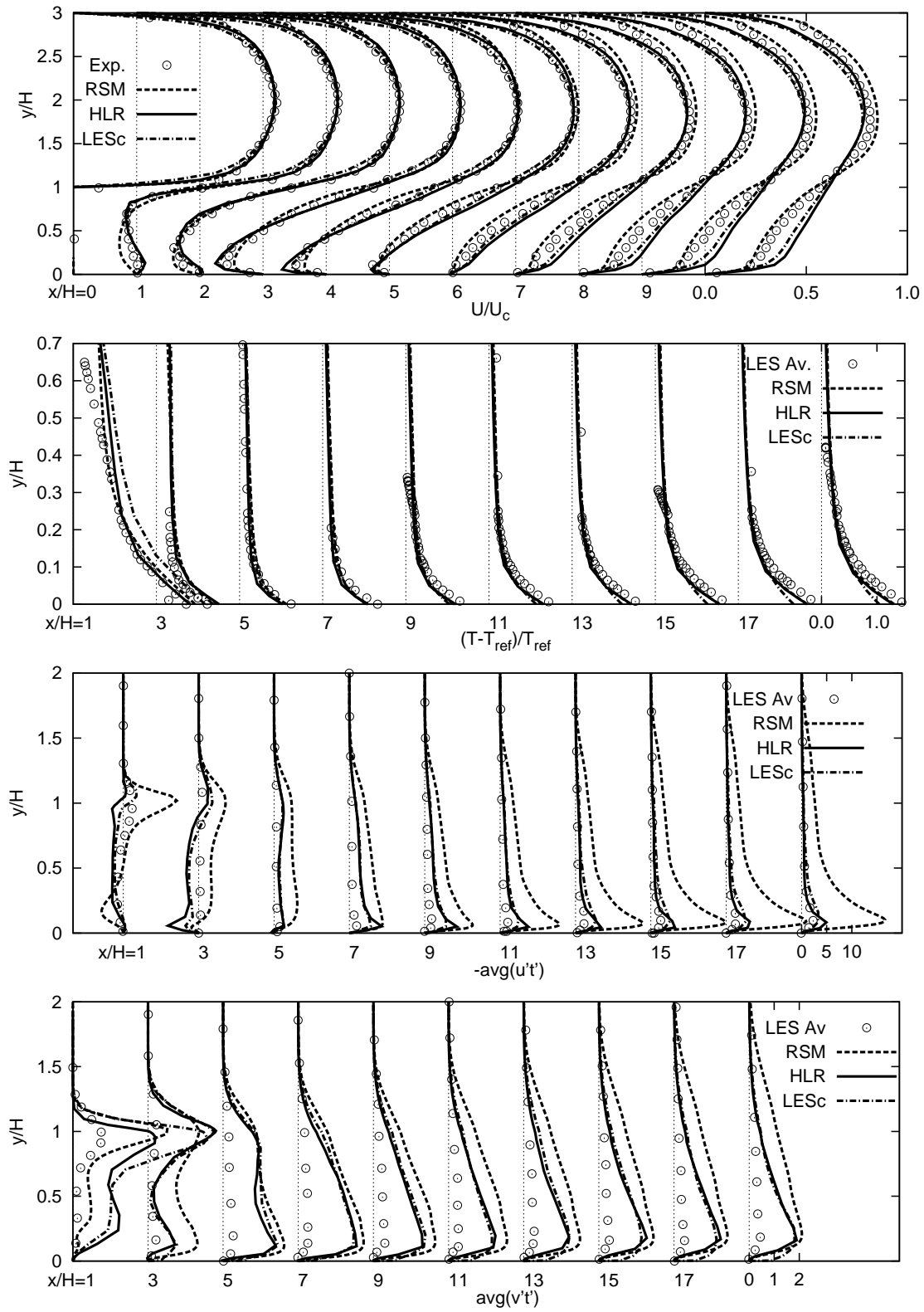


Abbildung 5.30: Geschwindigkeitsfeld, dimensionslose Temperatur und Reynolds-flüsse an verschiedenen Schnitten in Strömungsrichtung bei 3kW/m^2

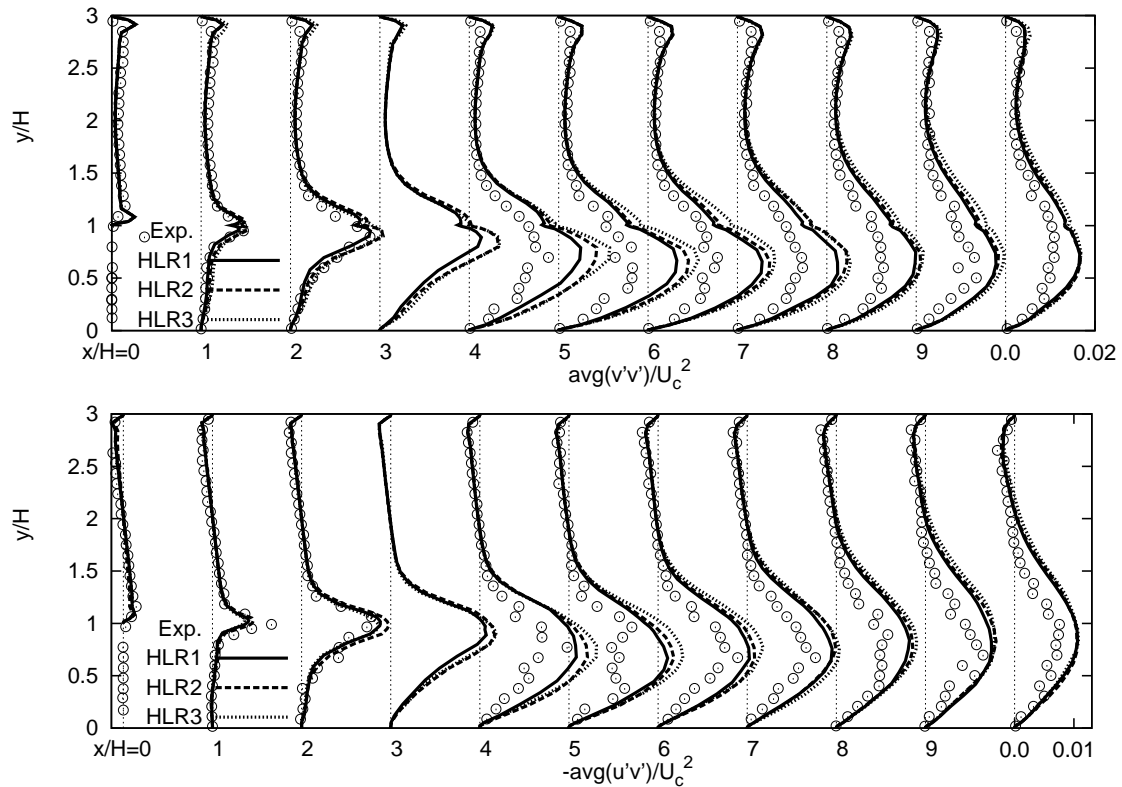


Abbildung 5.31: Vergleich der Reynoldsspannungen bei unterschiedlichen Heizungs-raten

Der Einfluss der unterschiedlichen Heizungs-raten auf die Reynoldsspannungen ist in Abb. 5.31 dargestellt. HLR1 bedeutet dabei, dass mit 1 kW geheizt wurde. Zum Vergleich sind die Spannungen des isothermen Experiments eingetragen. Man kann erkennen, dass es im Bereich um den Wiederanlegepunkt einen geringen Einfluss der Heizung dahingehend gibt, dass die Spannungen durch größeren Wärmestrom leicht vergrößert werden. Weiter stromab lässt dieser Einfluss jedoch nach, so dass insgesamt gesehen der Einfluss vernachlässigbar ist.

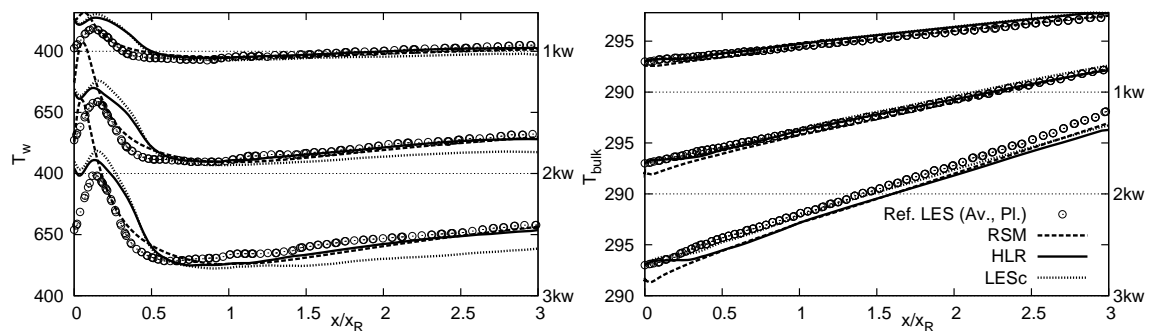


Abbildung 5.32: Änderung der Wandtemperatur und der gewichteten mittleren Temperatur in Strömungsrichtung

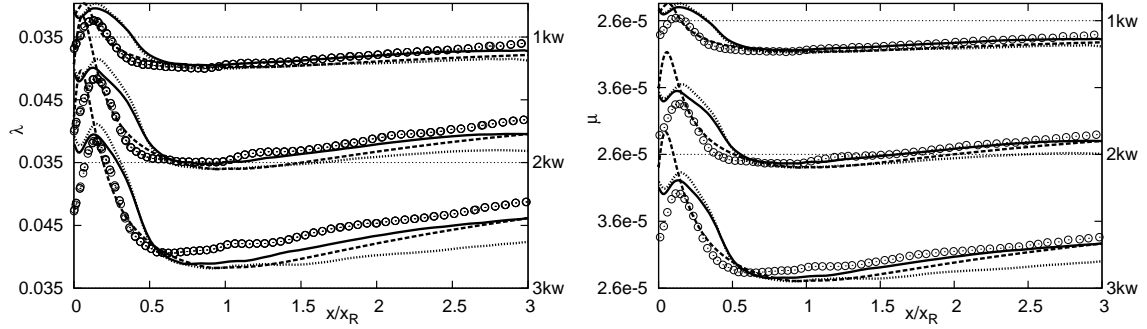


Abbildung 5.33: Änderung der Stoffwerte in unmittelbarer Nähe zur Wand

Die gute Übereinstimmung der mit der HLR-Methode bestimmten Wandtemperaturen in Abb. 5.30 für 3 kW lässt sich in Abb. 5.32 links wiederfinden. Zusätzlich zu 3 kW sind hier noch die Wandtemperaturverläufe für die beiden anderen Heizungsraten mit angegeben. Es ist zu erkennen, dass die Abweichung im Fall der groben LES mit zunehmendem Wärmestrom immer größer wird, während das hybride Verfahren und das Reynoldsspannungsmodell im hinteren Bereich sehr gute Übereinstimmung mit den Referenzdaten zeigen. Im vorderen Bereich, direkt hinter der Stufe, schießt das RS-Modell jedoch weit über die Referenzwerte hinaus. Aufgrund des zu Anfang angesprochenen Problems mit der Wiederanlegelänge der Referenzdaten, ist die x -Koordinate hier nicht mit H , sondern mit der jeweiligen Wiederanlegelänge x_R normiert. Neben der Wandtemperatur ist noch die Temperatur T_b interessant. Sie wird nach der Formel

$$T_b = \frac{\iint_{yz} \rho U c_p T \, dz \, dy}{\iint_{yz} \rho U c_p \, dz \, dy} \quad (5.5)$$

bestimmt und stellt somit eine Art gewichtete mittlere Temperatur dar. Bis auf den stärksten Wärmestrom, bei welchem eine etwas zu niedrigen Temperatur T_b berechnet wird, liegen alle Rechnungen hier sehr gut. Im Gegensatz zur dimensionslosen Auftragung in Abbildung 5.30 sind hier Absolutwerte gezeigt, um die Größe der Temperaturänderung hervorzuheben. Im Fall der stärksten Heizrate werden in der Rückströmzone gemittelt ca. 900° K erreicht, was gut dem dreifachen der Einströmtemperatur entspricht. Die lokalen Momentanwerte liegen noch höher, wie Abb. 5.36 noch zeigen wird bei bis zu 1100° K, wodurch die Notwendigkeit variabler Stoffwerte unterstrichen wird.

Die Variation der Stoffgrößen gemäß (5.4) lässt sich in Abb. 5.33 verfolgen. Zur Darstellung wird eine Linie nahe der unteren geheizten Wand gewählt, um die maximalen Variationen zu zeigen. Da diese Änderung direkt mit der Temperaturänderung verknüpft ist, zeigt sich ein ähnliches Verhalten der Ergebnisse. Je stärker die Wärmezufuhr wird, desto mehr weichen die Ergebnisse von den Referenzdaten ab, wobei sich das hybride Verfahren am besten präsentiert. Das RS-Modell zeigt im mittleren und hinteren Bereich ebenfalls eine gute Übereinstimmung, der Peak-Wert wird aber stark überschätzt. LES auf dem gleichen Gitter wie HLR liegt beim

Peak etwas zu hoch, nach hinten heraus zu tief. Auch hier sind wieder Absolutwerte gezeigt. Durch die Temperaturerhöhung tritt sowohl bei der Viskosität, als auch bei der Wärmeleitfähigkeit eine Vergrößerung der Werte auf. Bei einer Temperaturerhöhung um den Faktor 3 ist mit (5.4) eine Änderung ungefähr um den Faktor von 2.2 verbunden, was auch gut in Abb. 5.33 wiedergefunden werden kann. Da die Dichte über die ideale Gasgleichung berechnet wird, in der die Temperatur mit Exponent eins verwendet wird, stellt sich eine Änderung um den Faktor 3 im Fall der stärksten Wärmezufuhr ein. Im Gegensatz zu den anderen Stoffwerten tritt hier aber eine Verminderung ihres Wertes um diesen Faktor ein.

Wichtig für die Charakterisierung der Reibung und der Wärmeübertragung an der Wand sind die dimensionslosen Kennzahlen Reibungskoeffizient C_f , Stanton-Zahl St und Nusselt-Zahl Nu :

$$C_f = \frac{2 \tau_w}{\rho U_c^2}, \quad St = \frac{q_w}{\rho_{ref} c_p U_{ref} (T_w - T_b)}, \quad Nu = \frac{q_w H}{\lambda_b (T_w - T_b)} \quad (5.6)$$

Dabei muss darauf geachtet werden, ob als Stoffgrößen die jeweilig lokale Größe, oder die Referenzgröße benutzt wird. Wie man anhand von (5.6) sieht, ist das von Kennzahl zu Kennzahl verschieden. Zur Bildung der Temperaturdifferenz wird bei St und Nu die gemittelte Temperatur T_b benutzt, nicht die Referenztemperatur, wie im Fall ohne variable Stoffwerte. Das für Nu nötige λ_b lässt sich über das Potenzgesetz direkt aus T_b berechnen:

$$\lambda_b = \lambda_{ref} \left(\frac{T_b}{T_{ref}} \right)^{0.71} \quad (5.7)$$

Wie oben bereits angesprochen, zeigt sich durch Hinzunahme eines starken Wärmestroms ein deutlich größerer negativer Peak im C_f -Verlauf (Abb. 5.34) innerhalb der Rückströmzone, als im isothermen Fall, bei welchem die Kurve im Allgemeinen ein Minimum von ca. -0.003 erreicht. Bei $2kW$ liegt dieser Wert betragsmäßig mehr als doppelt so hoch (-0.0065), im Fall von $3kW$ ca. beim 2.8-fachen (-0.085). Im hinteren Bereich ist wie auch im vorderen Bereich betragsmäßig eine Erhöhung durch Wärmezufuhr zu verzeichnen. Der Endwert steigt von 0.003 bei $1kW$ bis auf 0.006 bei $3kW$ an. Durch Wärmezufuhr wird der C_f -Verlauf sozusagen in Ordinate gerichtet gestreckt. Beides hat seine Ursache in der Verringerung der Dichte, welche zum

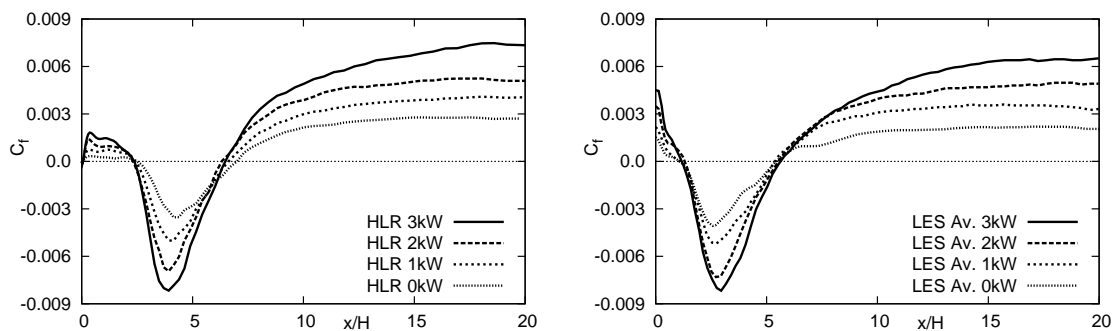


Abbildung 5.34: Änderung des Reibungsbeiwertes C_f entlang der unteren Wand bei unterschiedlichen Heizungsraten im Fall von HLR und LES

einen direkt in der Definition des Beiwertes auftaucht (5.6), zum anderen indirekt durch die schon bei der Diskussion zu Abb. 5.30 angesprochene Vergrößerung der Geschwindigkeit, welche vor allem im Bereich hinter dem Wiederanlegepunkt wirksam wird. Interessanterweise nimmt die Reynoldszahl im hinteren Bereich dabei sogar ab, denn unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung erhält man

$$Re_{q \neq 0} = \frac{\rho^q U^q L}{\mu^q} = \frac{\mu}{\mu^q} Re_{q=0}, \quad (5.8)$$

was in unserem Fall ca. der Hälfte des isothermen Referenzwertes entspricht. Anhand der Nulldurchgänge ist weiterhin der Trend der leichten Verkürzung der Rezirkulationszone gegenüber der isothermen Rechnung zu beobachten. Im Gegensatz zu den Absolutwerten ist jedoch keine direkt proportionale Änderung zu erkennen, 3 kW liegt hier zwischen den beiden anderen Heizungsraten.

Auf den ersten Blick sehen die beiden Ergebnisse von HLR (links) und LES (rechts) sehr ähnlich aus, der Trend zur betragsmäßigen Vergrößerung wird gleichermaßen berechnet. Beim genaueren Hinsehen gibt es jedoch Unterschiede. Am auffälligsten ist der hohe Wert von C_f ungleich Null bei $x/H = 0$, der dort nicht vorliegen dürfte, da die axiale Geschwindigkeit hier verschwindet und damit τ_w und auch C_f an dieser Stelle gleich Null sein müssen. Auch eine Verkürzung der Rezirkulationszone gegenüber dem isothermen Fall ist hier nicht zu beobachten. Um die beiden Ergebnisse noch besser vergleichen zu können, sind in Abb. 5.35 oben links alle C_f -Verläufe überlagert dargestellt. Die LES von Avancha und Pletcher ist als Referenz mit Punkten eingetragen. Zusätzlich werden noch die Ergebnisse des Reynoldsspannungsmodells und der groben LES dargestellt, für welche das Smagorinsky-Modell mit Dämpfung zum Einsatz kam. Gleich zu Beginn fällt die schon besprochene Diskrepanz in den Wiederanlegelängen der Referenz und der übrigen Berechnungen ins Auge. Alle drei aktuell durchgeführten Berechnungen (LESc, HLR, RSM) zeigen jedoch in allen Fällen untereinander eine sehr gute Übereinstimmung beim Ende der primären Rezirkulationszone. Bezüglich der Länge der sekundären Zone stimmen die grobe LES und HLR gut überein, bei der RANS-Rechnung scheint diese nahezu ganz zu verschwinden, denn bei 3 kW ist um Null kaum noch ein positiver Wert zu erkennen. Dies erklärt auch, warum die Wandtemperatur in Abb. 5.32 und damit ebenfalls die Stoffwerte so stark gegenüber der Referenz ansteigen. Das Fluid strömt innerhalb der Rezirkulationszone relativ langsam an der unteren Wand entlang und heizt sich dabei immer mehr auf bis es auf die sekundäre Rezirkulationszone trifft und nach oben abgelenkt wird. Fehlt diese Zone, oder ist sie sehr klein, dann heizt sich das Fluid und damit die Wand umso mehr auf, je länger es an der Wand entlangströmt. Die betragsmäßige Vergrößerung des C_f -Wertes mit zunehmender Heizung wird vom RS-Modell zwar im Trend erkannt, aber stark unterschätzt, so dass der kleinste Wert bei der stärksten Heizrate nur etwa bei der Hälfte des Wertes aller anderen Rechnungen liegt. Dafür zeigt sich im hinteren Bereich eine gute Übereinstimmung mit der Referenz-LES und HLR. Im Fall der groben LES zeigt sich ein gegenteiliges Verhalten. Die Erfassung des Bereichs der negativen C_f -Werte stimmt gut mit der Referenz und dem hybriden Verfahren überein, dafür stellt sich im hinteren Bereich eine starke Überbewertung des Reibungsbeiwertes ein. Diese Überbewertung wird

umso gravierender, je größer die Heizrate ist. Wie schon bei der Stufenströmung mit Wärmeübertragung beobachtet, kombiniert das hybride Verfahren effektiv die jeweils guten Zonen von LES und RANS, so dass insgesamt, bis auf das Problem mit der Länge der sekundären Rezirkulationszone, ein guter Verlauf erreicht wird. Um diesen Einfluss in der Darstellung etwas zu verringern, wird die Abszisse nicht mit der Höhe H normiert, sondern mit der jeweiligen Wiederanlegelänge x_R . Damit fallen dort die Kurven zusammen, das Problem im vorderen Teil wird leicht verringert, besteht aber nach wie vor. Bei der St -Zahl zeigt das HLR-Verfahren

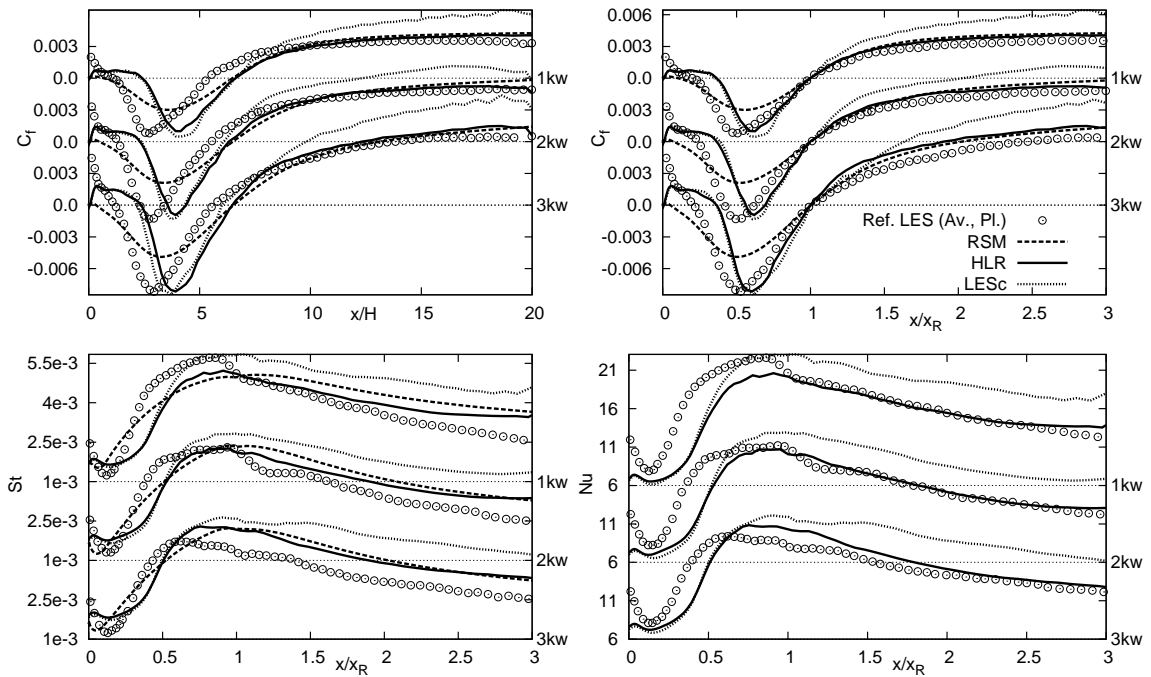


Abbildung 5.35: Änderung der dimensionslosen Kennzahlen in Strömungsrichtung

gute Ergebnisse, lässt man das Problem der Wiederanlegelängen unberücksichtigt, wodurch die Kurven im Anfangsbereich verschoben sind. Tendenziell wird die Kennzahl im hinteren Bereich etwas zu groß berechnet. Das Reynoldsspannungsmodell liegt dort nah an der hybriden Lösung. LES liegt bei zu großen Werten, was an der falschen Berechnung der Wandtemperatur liegt, die hier der Schlüsselparameter ist. Es zeigt sich also ein zum Reibungsbeiwert vergleichbares Bild. Ähnlich verhält es sich auch im Fall der Nu -Zahl. Hier sind jedoch keine RSM-Daten vorhanden. Da aber wiederum die Wandtemperatur den Hauptparameter darstellt, lässt sich ein ähnliches Ergebnis wie bei der St -Zahl erwarten. Um die Struktur der an der Stufenkante ablösenden Strömung zu verdeutlichen, werden in Abb. 5.36 Isoflächen des fluktuierenden Drucks gezeigt. Einfärbt sind sie mit der momentanen Dichte (links) bzw. Temperatur (rechts). Zusätzlich wird jeweils noch die untere Wand in dieser Kontur eingefärbt, so dass man einen Eindruck der Wandwerte bekommt. Die Temperatur steigt lokal bis auf ca. 1100°K an und die Dicht nimmt dementsprechend ab. Außerdem kann man erkennen, dass sich die starke Temperaturerhöhung nur begrenzt in das Strömungsinere fortpflanzt.

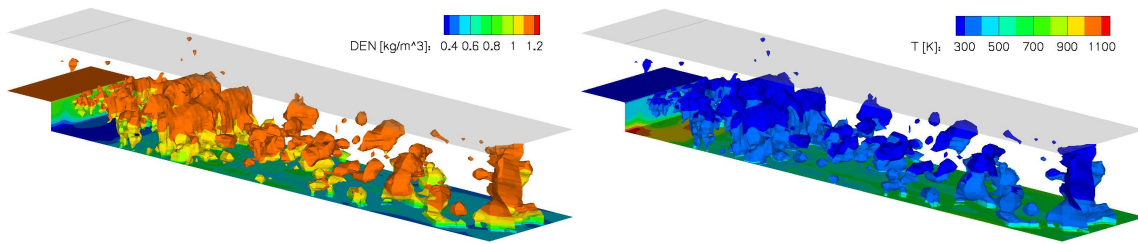


Abbildung 5.36: Isofläche des fluktuierenden Drucks, eingefärbt mit der Dichte und der Temperatur bei 3 kW/m^2

5.3 Periodische Strömung über einen zweidimensionalen Hügel

Anders als bei der Strömung über die zurückspringende Stufe ist die periodische Strömung über einen glatt geformten Hügel, montiert auf der unteren Wand eines Kanals, durch eine Ablösung von der gekrümmten Oberfläche des Hügels charakterisiert (Abb. 5.37). Damit ist diese Ablösung schwerer vorherzusagen, als der fixierte Ablösepunkt an der Stufenkante. Als Referenz wird eine hoch aufgelöste LES Rechnung mit rund 13 Mio. Gitterpunkten (Fröhlich et al., 2005) ausgewählt. Dieser Fall

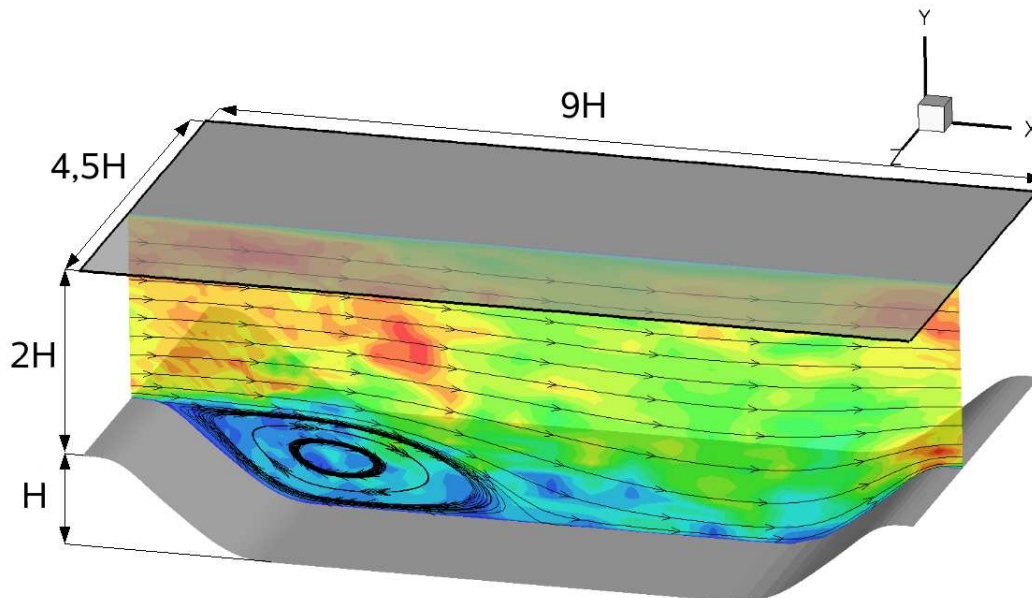


Abbildung 5.37: Geometrie und Topologie der periodischen Strömung über einen zweidimensionalen Hügel

wurde in der Vergangenheit sehr intensiv als Testfall für RANS Modellvalidierungen benutzt, Jakirlić et al. (2002), Manceau et al. (2002). Ohne ins Detail zu gehen, soll an dieser Stelle nochmals in Erinnerung gerufen werden, dass RANS-Modelle, nahe-

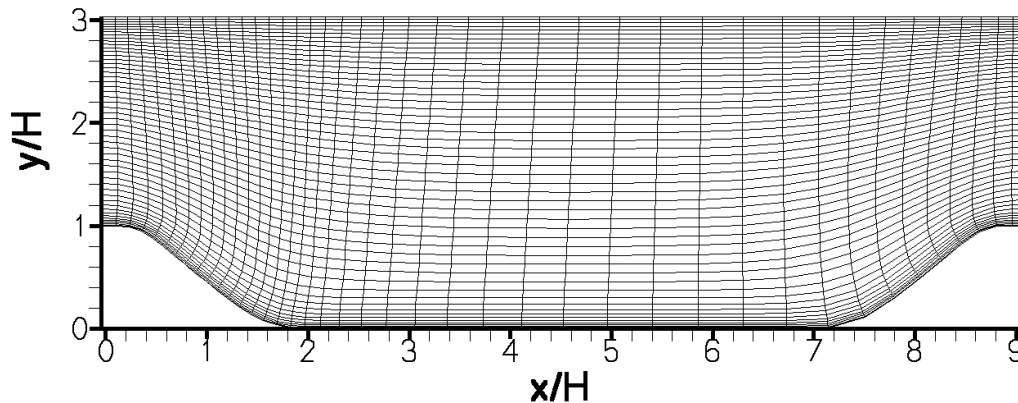


Abbildung 5.38: Rechengitter der periodischen Strömung über einen zweidimensionalen Hügel (jeder 2. Gitterpunkt wird gezeigt)

zu unabhängig von ihrem Modellierungslevel schlechte Ergebnisse in dieser Art von Strömung liefern. Der Grund dafür liegt in einer Vielzahl von Eigenschaften, die an instationäre Strömungsablösung gekoppelt sind: stark variierende Ablöse- und Wiederanlegegebiete, hoch instationäre abgelöste Scherschicht, Grenzschichtneubildung, alternierende Druckgradienten (positiv und negativ).

Die Hügelhöhe beträgt im vorliegenden Fall $H = 0.028\text{ m}$. Die obere Wand, an der als Randbedingung die Haftbedingung vorgegeben wird, liegt $2H$ über dem Hügel. In Spannweitenrichtung ist das Gebiet $4.5H$ ausgedehnt, in Strömungsrichtung hat es eine Länge von $9H$. In diesen beiden Richtungen werden periodische Randbedingungen vorgegeben. Das Rechengitter (Abb. 5.38) besteht aus 240000 ($80 \times 100 \times 30$) Zellen, was um einen Faktor von rund 54 größer ist, als das Gitter der Referenz-LES. Die Reynoldszahl der Strömung basierend auf der Stufenhöhe liegt bei $Re_H = 10600$. Als Fluid wird Luft mit einer Dichte von 1.185 kg/m^3 und einer kinematischen Viskosität von $1.553 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ verwendet. Bei einem Sollmassenstrom von $\dot{m} = 0.05\text{ kg/s}$ ergibt sich eine mittlere Geschwindigkeit im engsten Querschnitt auf der Hügelkuppe von $u_m = 5.88\text{ m/s}$. Um dies bei periodischen Randbedingungen zu realisieren wird ein Druckgradient von $-\frac{\partial p}{\partial x} \approx 17\text{ N/m}^3$ vorgegeben. Die Einhaltung des gewünschten Massenstroms wird dabei durch eine programminterne Regelung gewährleistet, so dass dieser Wert von Zeitschritt zu Zeitschritt leicht schwankt.

Mit dieser moderaten Reynoldszahl ist ebenfalls ein moderater y^+ -Wert bei der automatischen Positionierung der Trennfläche zu erwarten. Abbildung 5.39 zeigt den Verlauf der sich einstellenden Position über 5000 Zeitschritte. Die Trennfläche positioniert sich bei $y^+ \approx 60$. Bei dieser Position werden zahlreiche Rechnungen mit verschiedensten Modellkombinationen durchgeführt. Tabelle 5.6 fasst die erreichten Ablöse- und Wiederanlegepunkte zusammen. Es ist ermutigend, zu sehen, dass die HLR-Ergebnisse, besonders das auf dem Konzept der homogenen Dissipation basierende, gut mit den Referenzdaten übereinstimmen. Wie erwartet sagt die reine RANS-Rechnung eine viel zu kleine Rezirkulationszone vorher. Ausnahme ist hier das k - ε - f -Modell, welches im Vergleich mit den anderen Modellen ca. die doppel-

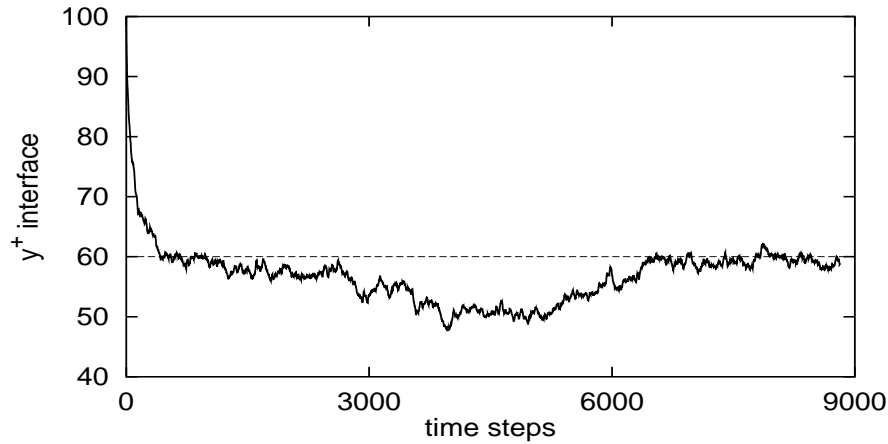


Abbildung 5.39: Änderung der Interface-Position mit variablem Interface im Fall des zweidimensionalen Hügels

te Länge berechnet und damit auch in Bezug auf die Positionen des Ablöse- und Wiederanlegepunktes in die Nähe der instationären Verfahren kommt. Anders als bei der zurückspringenden Stufe hängen die Wiederanlegelängen stark vom berechneten Ablösepunkt ab, so dass sich teilweise große Diskrepanzen bei der Vorhersage dieser Länge einstellen. Am besten schneidet die Kombination aus Smagorinsky-Modell und dem k - ε - ζ - f -Modell ab. Dies ist nicht überraschend, denn dieses hatte als RANS-Modell ebenfalls am besten abgeschnitten.

Modell	Ablösepunkt	Wiederanlegepunkt (H=Hügelhöhe)	Gitterpunkte [Mio.]
LES (Fröhlich et al.)	0.22 H	4.72 H	13
LESc Smag damping	0.19 H	4.90 H	0.24
DES (Sarić)	0.21 H	4.71 H	0.24
HLR Smag/Chien $y^+ = 60$	0.16 H	4.86 H	0.24
HLR Yosh/Chien $y^+ = 60$	0.18 H	4.43 H	0.24
HLR Smag/Hom $y^+ = 60$	0.24 H	4.62 H	0.24
HLR Smag/LS $y^+ = 60$	0.23 H	4.56 H	0.24
HLR Smag/KZF $y^+ = 60$	0.22 H	4.71 H	0.24
HLR Smag/Chien $y/\Delta = 2$	0.17 H	5.21 H	0.24
HLR S/C $y^+ = 60$ forcing	0.17 H	4.84 H	0.24
HLR S/C $y/\Delta = 2$ forcing	0.17 H	4.99 H	0.24
RANS LS (2d)	0.60 H	2.67 H	0.024
RANS Chien (2d)	0.39 H	2.42 H	0.024
RANS Hom (2d)	0.47 H	2.86 H	0.024
RANS KZF (2d)	0.34 H	4.28 H	0.024

Tabelle 5.6: Vergleich der Wiederanlegelängen verschiedener Modelle mit dem Experiment für die Strömung über den zweidimensionalen Hügel

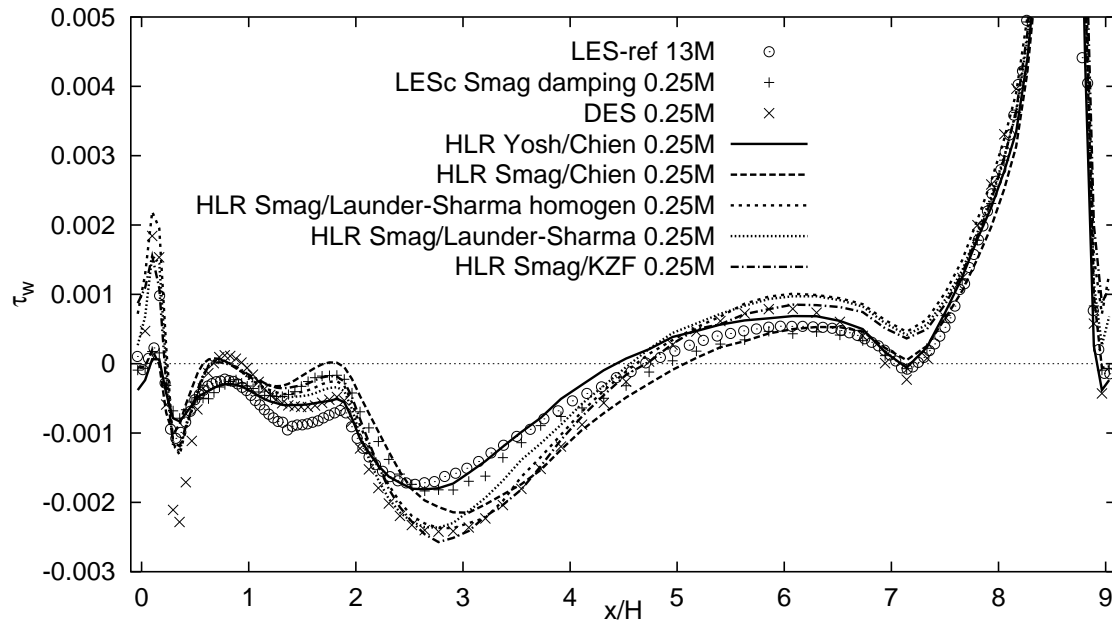


Abbildung 5.40: Verlauf der Wandschubspannung der Strömung über den zweidimensionalen Hügel beim Einsatz verschiedener Modellkombinationen

Einen Schritt weiter als der Vergleich der Ablöse- und Wiederanlegelänge geht die Darstellung des Reibungsbeiwertes oder der Wandschubspannung τ_w , welche in Abbildung 5.40 dargestellt ist. Den Peak bei $x/H \approx 8.65$ mit einem Wert von $\tau_w = 0.014 \text{ N/m}^2$ treffen alle Verläufe sehr gut, so dass zur besseren Darstellung der Unterschiede im restlichen Verlauf die Ordinate bei 0.005 abgeschnitten wurde. Die insgesamt beste Übereinstimmung bezüglich der Wandschubspannung, zeigt die HLR-Methode, die Yoshizawas Modell benutzt. Besonders ist dabei der Bereich vom Ablösepunkt bis zum Fuß des Hügels bei $x/H = 2$ zu nennen. Hier zeigen alle anderen HLR-Rechnungen ein betragsmäßig wesentlich zu niedriges τ_w an. Weiterhin ist dieses Modell auch das einzige, welches die kleine Rückströmzone bei $x/H \approx 7.2$ detektiert, was durch die leicht negativen Werte der Wandschubspannung zu erkennen ist. Der Wiederanlegepunkt wird jedoch etwas zu weit vorne berechnet. Ebenfalls passabel schneidet die Modellkombination Smagorinsky/Chien ab. Alle anderen Modellkombinationen haben den Hang, vor und hinter dem Wiederanlegepunkt betragsmäßig zu hohe Wandschubspannungswerte zu berechnen, obwohl der Wiederanlegepunkt an sich teilweise sehr gut getroffen wird (vgl. Tab. 5.6). LES auf dem gleichen Gitter wie HLR schneidet insgesamt überraschend gut ab. Die einzige größere Abweichung befindet sich im Bereich des Hügelfußes ($x/H = 2$), wo τ_w wie auch bei den meisten HLR - Rechnungen betragsmäßig zu niedrig bleibt. Eine mögliche Ursache für das gute Abschneiden ist das Vorliegen einer im Prinzip zweidimensionalen Strömung, welche ohnehin nicht so eine hohe Auflösung erfordert. Um auch einen Vergleich zu anderen hybriden Verfahren machen zu können, ist in Abb. 5.40 zusätzlich noch eine DES-Rechnung von Sarić et al. eingetragen. Im Bereich um $x/H = 2$ präsentiert sich diese zwar vergleichbar zu HLR Yosh/Chien und

der Wiederanlegepunkt wird ebenfalls sehr gut getroffen, ansonsten ist eine starke betragsmäßige Überbewertung von τ_w zu verzeichnen. Besonders im vorderen Bereich bis $x/H = 1$ treten ein paar eindeutige Ausreißer auf. Diese teils doch sehr unterschiedlichen Ergebnisse sind Anlass, im Folgenden noch weitere Untersuchungen bezüglich der Interface - Position, ihrer Positionierungsvariable und den Modellen an sich anzustellen. Als erstes wird der Einfluss der Interface-Position untersucht. Dazu werden unabhängig von der mittels des variablen Interface berechneten Position von $y^+ = 60$ zusätzlich $y^+ = 20, 40, 80, 100$ zur Positionierung der Trennfläche verwendet. Die Ergebnisse in Bezug auf die errechnete Wandschubspannung sind in Abb. 5.41 oben dargestellt.

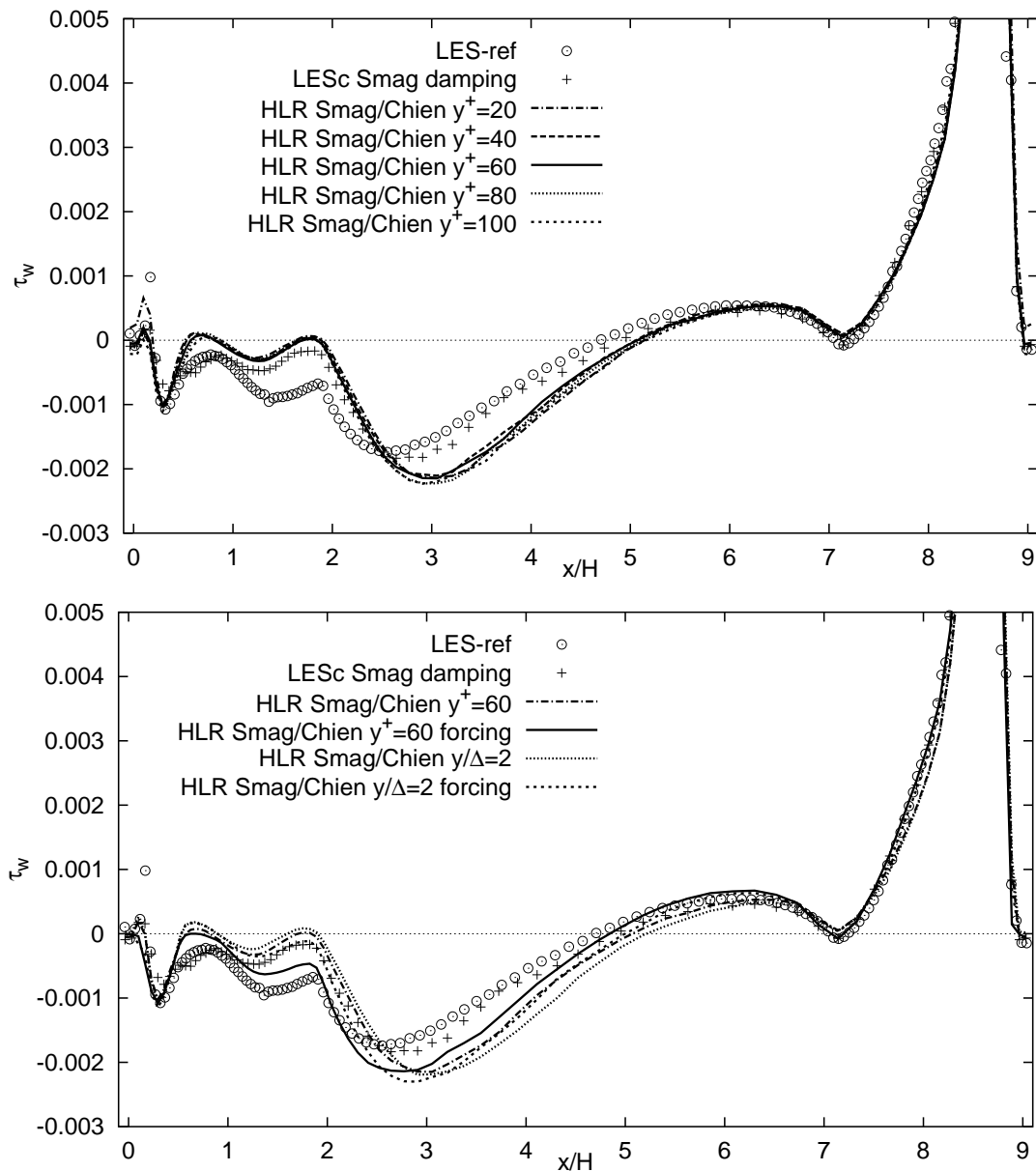


Abbildung 5.41: Verlauf von τ_w der Strömung über den zweidimensionalen Hügel bei unterschiedlichen Positionen der Trennfläche und beim Einsatz der forcing-Technik

Zunächst fällt auf, dass der Einfluss der Position der Trennfläche bei diesem Testfall als relativ gering angesehen werden kann. Auch wenn die Unterschiede klein sind, so ist dennoch zu erkennen, dass der Verlauf $y^+ = 60$ das beste Ergebnis liefert, was eine Bestätigung für die Funktionsweise der variablen Positionierungs-Regelung ist. Ein Vergleich zwischen Berechnungen mit und ohne forcing unter Verwendung der Kombination Smagorinsky und Chien mit Einsatz der Schalter $y^+ = 60$ und $y/\Delta = 2$ ist in Abb. 5.41 veranschaulicht. Bei beiden Schaltern ist durch forcing eine deutliche Verbesserung der Verläufe zu beobachten. Im Fall des Schalters y/Δ verläuft die Kurve mit forcing im Bereich um den Wiederanlegepunkt wesentlich näher an den Referenzdaten, so dass auch der Wiederanlegepunkt selbst besser bestimmt wird. Aber auch im vorderen Bereich um $x/H = 1.8$, in welchem die Berechnung ohne forcing weit über den Referenzdaten liegt und sogar positive Werte annimmt, zeigt sich eine Verbesserung. An dieser Stelle wirkt auch das forcing im Fall des Schalters y^+ sehr positiv auf das Ergebnis. Da die Ausgangsberechnung ohne forcing hier schon besser liegt als bei y/Δ , kommt die Kurve nah an die Referenzdaten heran. Im Gebiet um den Wiederanlegepunkt, in welchen die Berechnung ohne forcing ebenfalls recht gut war, zeigt sich hingegen nur ein geringer Einfluss. Allen Berechnungen gemeinsam bleibt jedoch weiterhin die betragsmäßige Überbestimmung der Wandschubspannung innerhalb des Rückströmgebietes.

Quantitative Ergebnisse zu verschiedenen hybriden Konfigurationen sind an unterschiedlichen Schnitten in Abb. 5.42 dargestellt. Ausgewählt wurden neben der Referenz-LES und der groben LES (gleiches Gitter wie HLR) zwei hybride Simulationen mit der Kombination Smagorinsky und Chien, erstens mit dem Schalter y^+ und forcing, zweitens mit dem Schalter y/Δ . Weiterhin werden eine Berechnung mit Yoshizawa und Chien sowie eine weitere mit Smagorinsky und $k-\varepsilon-\zeta-f$, beide mit $y_{f_{ce}}^+ = 60$ gezeigt. Die Verläufe der gemittelten axialen Geschwindigkeit folgen denen der Referenz-LES insgesamt sehr gut. Die größten Abweichungen liegen im Bereich um $x/H = 3-5$, innerhalb welches auch beim Verlauf der Wandschubspannung große Abweichungen auftreten. Der Bereich der ebenfalls großen Abweichungen von den Referenz-Daten im Fall von τ_w bei $x/H = 1-2$ findet sich in der V -Geschwindigkeit wieder. Dabei erkennt man direkt die unterschiedlichen Längen der Rückströmzone wieder. Diese sind wiederum in Einklang mit dem Turbulenzlevel in der abgelösten Scherschicht. Ein im Vergleich mit den Referenzdaten zu hohes Level vor allem an Schubspannung ist mit einer kürzeren Rückströmzone verknüpft (Yosh/Chien), ein zu niedriges Level mit einer längeren Zone (Smag/Chien, y/Δ). Vergleicht man die Werte in Tabelle 5.6, so ist es interessant zu sehen, dass vor allem der Anfangsbereich der Scherschicht ($y/H = 0.5$) hierfür repräsentativ ist. Weiter stromab übersteigt auch teilweise das Spannungslevel der Simulationen mit längerer Zone das der Referenz. Die turbulente kinetische Energie wird generell überbewertet, was ein typisches Verhalten bei groben Auflösung ist und mit der Unterschätzung der Dissipation in diesem Fall zusammenhängt. Da die Reynoldsszahl jedoch nicht sehr hoch ist, fällt die Überbewertung nicht allzu hoch aus. Die Kombination mit Yoshizawa-Modell zeigt aufgrund der zusätzlichen Transportgleichung für k hier das beste Ergebnis.

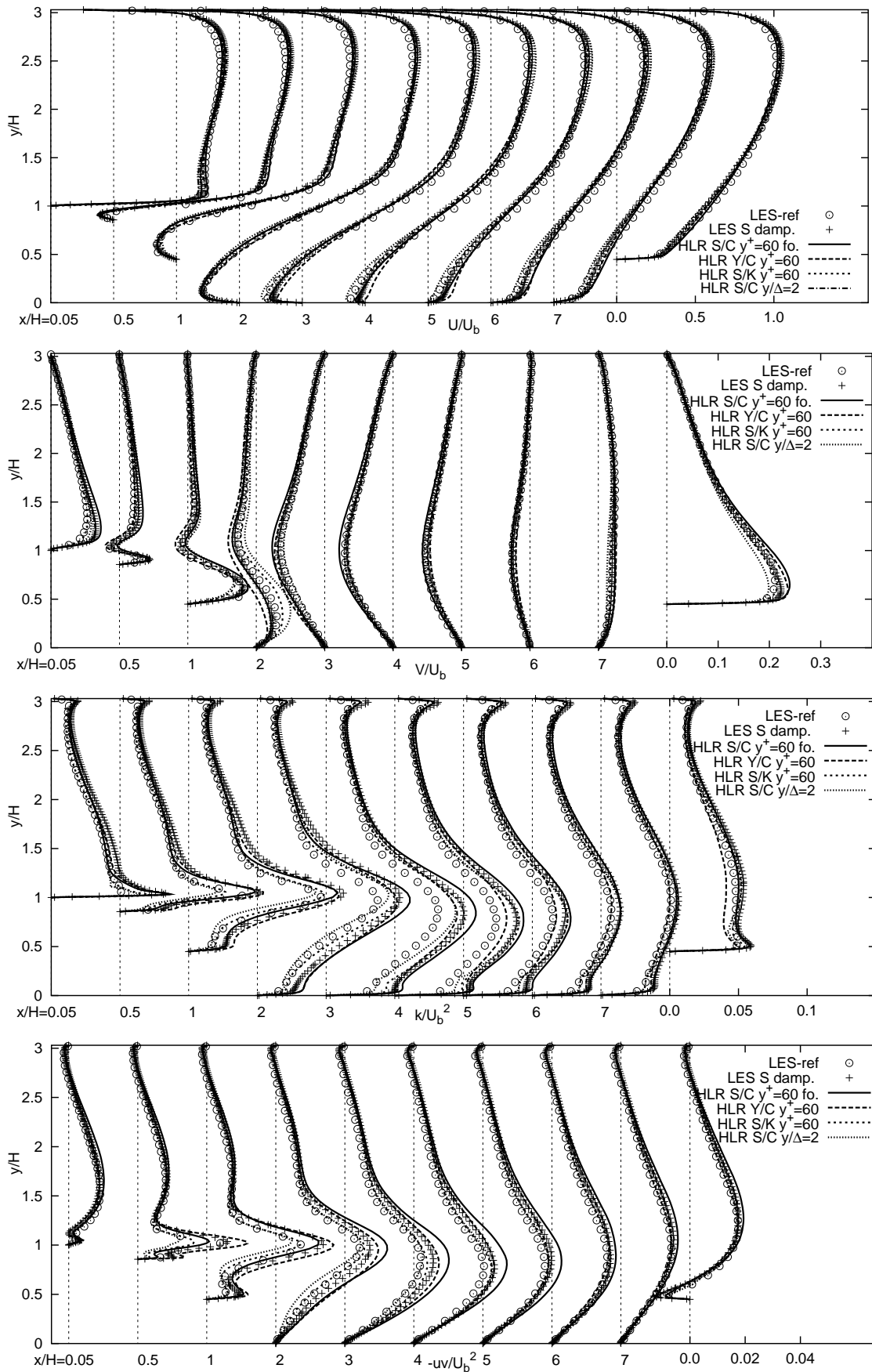


Abbildung 5.42: Verlauf der mittleren axialen Geschwindigkeit und der turbulenten kinetischen Energie verschiedener Rechnungen im Falle des zweidimensionalen Hügels